ALGEBRA y ALGEBRA II

Segundo cuatrimestre de 2016

Examen Final - 6 de marzo

NOMBRE	1	2	3	4	5	6	Total

Parte Práctica

1. Sea $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la transformación lineal dada por
$$T(x,y,z,w) = (-2x+2y-2z, -x+y-z, x+2z+w, -y-z-w).$$
   (a) Decidir cuáles de los siguientes vectores están en el núcleo de T: $(1,1,0,-1), (1,0,-1,2), (-2,0,2,-2)$.
   (b) Decidir cuáles de los siguientes vectores están en la imagen de T: $(1,1,1,1), (2,1,1,-2)$.
   (c) Dar la matriz de T con respecto a la base ordenada de $\mathbb{R}^4$
$$B = \{(0,0,0,1), (0,0,-1,0), (1,1,0,0), (2,0,0,0)\}.$$
   (d) Dar una base de $\mathrm{Nu}(T) \cap \mathrm{Im}(T)$ y de $\mathrm{Nu}(T) + \mathrm{Im}(T)$.

2. Sea β el siguiente subconjunto de $\mathbb{R}^5$ y W el subespacio generado por β
$$\beta = \{(1,0,-c,0,1), (1,c,1,0,1), (1,1,c,0,1)\}.$$
   (a) Determinar para qué valores de c se puede completar β a una base de $\mathbb{R}^5$
   (b) Para cada c mostrar que existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5$ cuya imagen es W. ¿Es única?
   (c) Para cada c, Dar una base del complemento ortogonal de W.

3. (a) Sea P el plano de $\mathbb{R}^3$ dado por la ecuación $2x-y+z=1$. Dar las ecuaciones normal y paramétrica de P.
   (b) Sea $\mathbb{R}^3$ con el producto interno dado por: $(x,y,z).(a,b,c) = xa + 4yb + ya + xb + zc$. Sean $u = (1,0,0)$, $v = (0,1,0)$ y $w = (0,0,1)$.
      i. Determinar cuál o cuáles de éstos son los vectores más largos.
      ii. Determinar el ángulo entre u y v.
      iii. Dar un vector ortogonal a v y w.
   (c) Calcular $\det(B)\det((BA)^{-1})$, donde
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & i \\ i & 1 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & i+1 & i \\ -2i & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.
   (a) Si U y W son dos subespacios de un espacio V de dimensión finita con producto interno y U y W son ortogonales, entonces $\dim(U+W) = \dim U + \dim W$.
   (b) Si v y w son autovectores de T, entonces $v+w$ es también autovector de T.

(c) Existen transformaciones lineales $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5$ y $S : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ tales que ambas composiciones $T \circ S$ y $S \circ T$ son inversibles.

Parte Teórica

5. Definiciones y propiedades.

   (a) Definir núcleo e imagen de una transformación lineal.

   (b) Definir base ortonormal de una espacio vectorial con producto interno.

   (c) Definir matriz elemental y mostrar que el determinante de una matriz elemental es no nulo.

   (d) Definir autovalor de una transformación lineal y definir autovector asociado. Mostrar que el conjunto de todos los autovectores asociados a un autovalor dado es un subespacio vectorial.

6. Enunciados y demostraciones.

   (a) Sean V y W dos espacios vectoriales de dimensión finita y sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Enunciar y demostrar el teorema que relaciona las dimensiones de V, W, núcleo de T e imagen de T.

   (b) Si A es una matriz $n \times n$, probar que son equivalentes:

      i. A es inversible.

      ii. El sistema homogéneo $AX = 0$, tiene sólo la solución trivial.

      iii. El sistema $AX = Y$, tiene una solución para cada Y.