7 siete

ALGEBRA y ALGEBRA II

EXAMEN FINAL - 6 DE DICIEMBRE

Segundo cuatrimestre de 2016

NOMBRE	1	2	3	4	5	6	Total
[illegible]	2	0,9	1,4	0.6	1,3	1	7,2

Justifique claramente todas sus respuestas.

PARTE PRÁCTICA

1. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

   (a) Dar la matriz escalón reducida por filas equivalente por filas a A.

   (b) Resolver el sistema $AX = 0$.

   (c) Resolver el sistema $AX = Y$ donde $Y = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ b \end{smallmatrix}\right)$. (Considerar los distintos casos según sea b.)

   (d) Si A es la matriz de una transformación lineal $T : V \to W$ en ciertas bases ordenandas B y B':

      i. Dar $\dim V$, $\dim W$, $\dim \mathrm{Nu}(T)$ y $\dim \mathrm{Im}\, T$.

      ii. Determinar cuáles de los siguientes vectores pertenecen a $\mathrm{Nu}(T)$ y/o a $\mathrm{Im}\, T$:

$$(1, 0, 1), (0, 1, 1, -1), (1, 0, 0, 0), (1, 1, -1).$$

2. (a) Determinar para qué valores de c el siguiente conjunto de vectores puede ser completado a una base de $\mathbf{R}^4$

$$\beta = \{(1, 0, c, 0), (0, c, 1, 0), (-1, 0, 1, 0)\}.$$

   (b) Par cada c mostrar que existe una transformacin lineal $T : \mathbf{R}^5 \to \mathbf{R}^4$ cuya imagen es el subespacio generado por β. ¿Es única?

   (c) Si T es una transformación lineal como las obtenidas en el ítem anterior, ¿puede ser T inyectiva?, ¿puede ser T suryectiva?

3. (a) Calcular $\det(AB)$, donde $A = \begin{pmatrix} 2 & 2^2 & 2^3 \\ 3 & 3^2 & 3^3 \\ 4 & 4^2 & 4^3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & a & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   (b) Dar la ecuación paramétrica de la recta R ortogonal al plano dado por la ecuación $x + y + 2z = 0$ y que pasa por el punto $(1, 1, 0)$.

   (c) Calcular los autovalores de $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ y decir si es diagonalizable.

4. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

   (a) Existen una matriz A, 3×3, y vectores de Y_0 e Y_1 de $\mathbf{R}^3$ tales que el sistema $AX = Y_0$ tiene una única solución y el sistema $AX = Y_1$ tiene infinitas soluciones.

   (b) Sea $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$ la transformación lineal dada por $T(x, y, z) = (x - y, y - z, -2x + 2z, x + y - 2z)$ y sea T^t su traspuesta. Existe $f \in (\mathbf{R}^4)^*$ tal que $T^t(f)$ es no nula en el subespacio $\{(a, a, a) : a \in \mathbf{R}\}$ de $\mathbf{R}^3$.

   (c) Si S y T son dos transformaciones lineales de $\mathbf{R}^2$ en $\mathbf{R}^2$ diagonalizables y tienen los mismos autovalores, entonces son iguales.