ÁLGEBRA II-ÁLGEBRA — *EXAMEN FINAL 24/07/2017*

NOMBRE Y APELLIDO:
CARRERA:
CONDICIÓN (R o L):

Para aprobar el examen, deben aprobarse las partes PRÁCTICA y TEÓRICA* **por separado. *Para ello cada parte debe estar correctamente resuelta en un 45%.*

Quienes hayan regularizado la materia durante el primer cuatrimestre de 2017 tendrán un puntaje* **extra *de acuerdo a la notas de los parciales.*

Los alumnos en* **Condición Regular *no deben resolver el ítem (b) del Ejercicio 1: el puntaje del mismo se les sumará automáticamente por revestir esta condición.*

Justificar todas las respuestas. No está permitido el uso de calculadoras o dispositivos electrónicos.

Parte Práctica

Ejercicio 1. (a) *(10 pts.)* Caracterizar mediante ecuaciones el conjunto de los (b_1, b_2, b_3) para los cuales el sistema

$$\begin{cases} x + y + z = b_1 \\ x - y + z = b_2 \\ 4x - 2y + 2z = b_3 \end{cases}$$

tiene solución.

(b) *(3 pts.)* (**solo alumnos libres**) Dar explícitamente un $(b_1, b_2, b_3) \neq (0, 0, 0)$ y describir el conjunto solución del sistema correspondiente.

Ejercicio 2. (a) *(6 pts.)* Dar la ecuación paramétrica de la recta $L \subset \mathbb{R}^3$ que pasa por el punto $p = (0, 1, 0)$ y es normal al plano $x + y + z = 0$

(b) *(3 pts.)* Dar una fórmula para la rotación del plano $\mathbb{R}^2$ con ángulo $\pi/3$.

Ejercicio 3. Sea W el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores $(-1, 3, -2, 0)$, $(1, 1, 0, 0)$, $(-1, 1, -1, 0)$ y $(0, 2, -1, 0)$.

(a) *(8 pts.)* Describir W implícitamente.

(b) *(5 pts.)* Dar una base de W y calcular $\dim W$.

(c) *(4 pts.)* Completar la base hallada a una base de $\mathbb{R}^4$.

Ejercicio 4. Sea P^3 el espacio vectorial de los polinomios $p(x)$ de grado menor a 3 y consideremos la función $T : P^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por:

$$T(p(x)) = (p(1), p(2)).$$

(a) *(5 pts.)* Mostrar que T es una transformación lineal.

(b) *(7 pts.)* Dar una base del núcleo y calcular la dimensión de la imagen.

Ejercicio 5. (a) *(9 pts.)* Definir una transformación lineal inyectiva $T : \mathbb{R}^3 \to M_2(\mathbb{R})$ tal que

$$T(1,1,1) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \quad \text{y} \quad T(0,1,0) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right).$$

(b) *(4 pts.)* Dar la matriz de T en la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y la base $\{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\}$ de $M_2(\mathbb{R})$.

Ejercicio 6. Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

(a) *(7 pts.)* Encontrar los autovalores de A.

(b) *(4 pts.)* Determinar cuáles de los siguientes vectores son autovectores de A:

$$(1,1,1), \qquad (1,0,1), \qquad (1,2,3), \qquad (2,1,2).$$

Parte Teórica

Ejercicio 7. *(10 pts.)* Enuncie el teorema de la dimensión de la suma de espacios vectoriales.

Ejercicio 8. *(10 pts.)* Demuestre que si V es un espacio vectorial generado por un número finito de elementos, entonces todas las bases de V tienen la misma cantidad de elementos.

Ejercicio 9. *(5 pts.)* Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar o dar un contraejemplo según el caso.

(a) Sea $T : V \to V$ una transformación lineal y sean B_1, B_2 bases de V. Si $[T]_{B_2}^{B_1}$ es la matriz identidad, entonces $T = \mathrm{Id}$.

(b) Si V es un subespacio de W entonces V^* es un subespacio de W^*.

(c) Si $\lambda \neq 0$ es autovalor de una transformación lineal invertible T, entonces λ^{-1} es autovalor de T^{-1}.

Ejercicio	1	2	3	4	5	6	**Total**
Puntaje							

Ejercicio	7	8	9	**Total**
Puntaje				

Extra

Total