Álgebra / Álgebra II **Examen final - 23/07/2018**

Nombre y Apellido: **Justifique todas sus respuestas**

Parte práctica.

1. (15 pts.) Sean W_1 y W_2 los subespacios de $\mathbb{R}^4$ definidos por
$$W_1 = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : \, z = y - x, \, w = x + y\} \qquad \text{y} \qquad W_2 = \langle (1,1,0,1), (0,1,1,0), (1,0,-1,1) \rangle \, .$$
   a) Dar una base ordenada $\mathcal{B}$ de W_2 contenida en su conjunto de generadores, y dar las coordenadas de un vector (x,y,z,w) en W_2 respecto de $\mathcal{B}$.
   b) Dar una base del subespacio $W_1 \cap W_2$, y calcular su dimensión.
   c) Dar una base del subespacio $W_1 + W_2$, y calcular su dimensión.

2. (15 pts.) Sea $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$.
   a) Probar que C es inversible y determinar su inversa.
   b) Mostrar una base ordenada $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que C sea la matriz de cambio de base de la base ordenada canónica a la base ordenada $\mathcal{B}$.
   c) Calcular los autovalores de C. ¿Es C diagonalizable?

3. (15 pts.)
   a) Definir una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que
$$T(1,0,0) = (2,-1,0), \qquad T(-1,0,1) = (-2,1,0), \qquad T(0,1,-1) = (0,0,0).$$
   ¿Existe una única transformación que cumpla estas condiciones?
   b) Dar una descripción implícita de $\operatorname{Nu} T$, calcular su dimensión y mostrar una base.
   c) Dar una descripción implícita de $\operatorname{Im} T$, calcular su dimensión y mostrar una base.
   d) Hallar $[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ donde $\mathcal{C}$ es la base ordenada canónica de $\mathbb{R}^3$ y $\mathcal{B} = \{(1,0,-1), (-1,1,1), (1,0,-2)\}$.

4. (15 pts.) Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.
   a) El subconjunto $\{(1,0,-2,0,1), (0,1,0,-1,2), (-2,1,4,-1,0)\} \subset \mathbb{R}^5$ puede extenderse a una base de $\mathbb{R}^5$.
   b) Si A y B son matrices inversibles, entonces la matriz A^2B^{-1} es inversible.
   c) Sea $T : V \to W$ una transformación lineal tal que $T(v_i) = w_i$, para $i = 1, \ldots, n$. Si $\{w_1, \ldots, w_n\}$ genera W entonces $\{v_1, \ldots, v_n\}$ genera V.

Parte Teórica.

5. (20 pts.) Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Probar que:
   a) Si S es un subconjunto linealmente independiente de V y α es un vector de V que no pertenece al subespacio generado por S, entonces el conjunto $S \cup \{\alpha\}$ es linealmente independiente.
   b) Si V es de dimensión finita n, y S_0 es un subconjunto linealmente independiente de V, entonces S_0 es finito y existen vectores $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ de V tales que $S_0 \cup \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ es una base de V.

6. (20 pts.) Sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, y sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Probar que $\dim(\operatorname{Im} T) + \dim(\operatorname{Nu} T) = \dim V$.

Parte práctica	1	2	3	4	**Total**
Evaluación					

Parte teórica	5	6	**Total**	**Total General**
Evaluación				