Álgebra / Álgebra II **Examen final - 10/08/2018**

Nombre y Apellido: **Justifique todas sus respuestas**

Parte práctica.

1. (15 pts.) Sea W el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores $(0,2,-1,3)$, $(-1,0,2,3)$, $(1,2,-3,0)$ y $(1,2,-2,0)$.
   a) Describir W implícitamente.
   b) Dar una base ordenada de W, y calcular su dimensión.
   c) Dado $(x,y,z,w)\in W$, dar sus coordenadas respecto de la base hallada en b).
   d) Completar la base hallada en b) a una base de $\mathbb{R}^4$.

2. (15 pts.) Sea $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & -1 & 0\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}\in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$.
   a) Probar que A es inversible y determinar su inversa.
   b) Determinar si A es semejante o no a una matriz diagonal D; y si lo es, dar una matriz P tal que $P^{-1}AP=D$.

3. (15 pts.)
   a) Definir una transformación lineal inyectiva (monomorfismo) $T:\mathbb{R}^3\to P_4(\mathbb{R})$ tal que
   $$T(1,0,-1)=1+x,\qquad T(-1,1,0)=x^2.$$
   ¿Existe una única transformación que cumpla estas condiciones?
   b) Dar la matriz de T en las bases ordenadas canónicas $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ y $\{1,x,x^2,x^3\}$ de $\mathbb{R}^3$ y $P_4(\mathbb{R})$, respectivamente.
   c) Dar una descripción implícita de $\operatorname{Im} T$, calcular su dimensión y mostrar una base.

4. (15 pts.) Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.
   a) Existe una base ordenada $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$ tal que $P=\begin{pmatrix}1/2 & -1\\ 1 & -2\end{pmatrix}$ es la matriz de cambio de base de la base ordenada canónica a la base ordenada $\mathcal{B}$.
   b) Existen subespacios W_1 y W_2 de $\mathbb{R}^6$ tal que $\dim W_1=5$, $\dim W_2=4$ y los vectores $(1,-1,1,-1,1,-1)$ y $(1,0,-1,-1,0,1)$ generan al subespacio $W_1\cap W_2$.
   c) Existe una transformación lineal $T:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^3$ tal que los vectores $(i,1,0)$, $(0,1+i,0)$ y $(1,0,-i)$ están en la imagen de T.

Parte Teórica.

5. (20 pts.) Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Probar que:
   a) Si W es un subespacio propio de V, entonces W es de dimensión finita y $\dim W<\dim V$.
   b) Si $V\neq 0$ y S es un conjunto finito de generadores de V, entonces existe un subconjunto $\mathcal{B}$ de S tal que $\mathcal{B}$ es base de V.

6. (20 pts.) Sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ tales que $\dim V=\dim W$, y sea $T:V\to W$ una transformación lineal. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:
   a) T es monomorfismo.
   b) T es epimorfismo.
   c) T es isomorfismo.

Parte práctica	1	2	3	4	**Total**
Evaluación					

Parte teórica	5	6	**Total**	**Total General**
Evaluación				