Álgebra / Álgebra II — Examen final - 22/07/2019

Nombre y Apellido: **Justifique todas sus respuestas**

Parte práctica.

1. (15 pts.) Sea W el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por el conjunto $S = \{(1,-1,1,-2),(1,0,0,3)\}$.
   a) Hallar todos los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $W = \langle (a,1,-1,2),(1,b,0,3)\rangle$.
   b) Sea $U = \big\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 :\ x-y-3z = t-z = 0\big\}$. Dar una descripción implícita y una base del subespacio $W+U$ y determinar su dimensión.
   c) Dado un vector $\alpha = (x,y,z,t)$ en $W+U$, encontrar vectores $\beta_1 \in W$ y $\beta_2 \in U$ tales que $\alpha = \beta_1+\beta_2$.

2. (15 pts.) Sea $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ la única transformación lineal tal que $T(e_1) = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $T(e_2) = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, $T(e_3) = \begin{pmatrix}0 & -1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, donde $\{e_1,e_2,e_3\}$ es la base ordenada canónica de $\mathbb{R}^3$.
   a) Dar una descripción implícita de $\operatorname{Nu} T$, calcular su dimensión y mostrar una base.
   b) Dar una descripción implícita de $\operatorname{Im} T$, calcular su dimensión y mostrar una base.
   c) Hallar $[T]_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}$ donde $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ son las bases ordenadas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^{2\times 2}$ dadas, respectivamente, por
   $$\mathcal{B}_1 = \{(1,0,-1),(-1,1,1),(2,0,-1)\}, \qquad \mathcal{B}_2 = \left\{\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\right\}.$$

3. (15 pts.) Sea $A = \begin{pmatrix} i & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1+i & 0 & 1\end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$.
   a) Calcular el determinante de la matriz A^{15}.
   b) Probar que A es inversible y determinar su inversa.
   c) Decidir si A es diagonalizable y en caso afirmativo hallar una matriz inversible P tal que $P^{-1}AP$ sea diagonal.

4. (15 pts.) Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.
   a) Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y sea $\mathcal{B}$ una base de V. Si W es un subespacio de V, entonces existe un subconjunto $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ tal que $\mathcal{B}'$ es base de W.
   b) Existe una transformación lineal sobreyectiva $T: \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ tal que los vectores $(1,0,1,-1,0)$ y $(0,0,0,-1,2)$ pertenecen al núcleo de T.
   c) Si $A \in F^{3\times 3}$ y $B \in F^{3\times 3}$ son tales que $AB = 0$, entonces $BA = 0$.

Parte Teórica.

5. (20 pts.) Sea V un espacio vectorial y sea S un subconjunto de V.
   a) Dar la definición del *subespacio generado por* S.
   b) Probar que si S es un subconjunto linealmente independiente de V y $\beta \in V$ es un vector que no pertenece al subespacio generado por S, entonces el conjunto $S \cup \{\beta\}$ es linealmente independiente.
   c) Supongamos que V es de dimensión finita. Probar que todo subconjunto linealmente independiente puede extenderse a una base de V.

6. (20 pts.) Sean V y W espacios vectoriales y sea $T: V \to W$ una transformación lineal.
   a) ¿Cuándo se dice que T es un *isomorfismo*?
   b) Probar que si T es isomorfismo, entonces $T^{-1}: W \to V$ es una transformación lineal.
   c) Probar que si V es de dimensión finita entonces $\dim V = \dim \operatorname{Nu}(T) + \dim \operatorname{Im}(T)$.

Parte práctica	1	2	3	4	**Total**
Evaluación					

Parte teórica	5	6	**Total**	**Total General**
Evaluación				