ÁLGEBRA / ÁLGEBRA II EXAMEN FINAL - 05/08/2019

Nombre y Apellido: **Justifique todas sus respuestas**

Parte práctica.

1. (15 pts.) Sea W el subespacio de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ generado por el conjunto $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ y sea $U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} : \ a + d = b + c \right\}$.
   - *a*) Dar una descripción implícita y una base del subespacio $W \cap U$ y determinar su dimensión.
   - *b*) Probar que $\operatorname{Tr} A = 0$, para toda matriz $A \in W \cap U$.
   - *c*) Hallar un subespacio U' de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $\mathbb{R}^{2\times 2} = U \oplus U'$.
2. (15 pts.) Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la transformación lineal definida por $T(x, y, z) = (-x - z, -y + z, -x - y + 2z, x + z)$.
   - *a*) Dar una descripción implícita de $\operatorname{Nu} T$, calcular su dimensión y mostrar una base.
   - *b*) Dar una descripción implícita de $\operatorname{Im} T$, calcular su dimensión y mostrar una base.
   - *c*) Calcular $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$, donde $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ son las bases ordenadas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^4$ dadas, respectivamente, por
   $$\mathcal{B} = \{(0, 1, 1), (2, 0, 0), (0, 1, -1)\}, \quad \mathcal{B}' = \{e_1 - e_2, e_1, e_3 - e_4, e_3\},$$
   siendo $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ la base ordenada canónica de $\mathbb{R}^4$.
3. (15 pts.) Sea $A = \begin{pmatrix} -i & 0 & i \\ 0 & 1+i & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$.
   - *a*) Calcular el determinante de A.
   - *b*) Probar que A es inversible y hallar matrices elementales $E_1, E_2, \ldots, E_n \in \mathbb{C}^{3\times 3}$, $n \in \mathbb{N}$, tales que $A = E_n \ldots E_2 E_1$.
   - *c*) $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ la transformación lineal cuya matriz en la base ordenada canónica es A. Decidir si T diagonalizable y en caso afirmativo mostrar una base ordenada $\mathcal{B}$ de $\mathbb{C}^3$ tal que $[T]_{\mathcal{B}}$ sea diagonal.
4. (15 pts.) Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.
   - *a*) Si $T : V \to V$ es una transformación lineal tal que $\operatorname{Im}(T) \subseteq \operatorname{Nu}(T)$, entonces $T^2 = 0$.
   - *b*) Existe una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $A^t = A$, para toda $A \in \mathcal{B}$.
   - *c*) Sea V un espacio vectorial de dimensión n y sea $T : V \to V$ una transformación lineal no inversible. Entonces existe una base ordenada de V tales que la matriz de T en dicha base tiene al menos una columna nula.

Parte Teórica.

5. (20 pts.) Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$.
   - *a*) Dar la definición de *subconjunto linealmente independiente* de V.
   - *b*) Probar que si S es un subconjunto linealmente independiente de V y $\beta \in V$ es un vector que no pertenece al subespacio generado por S, entonces el conjunto $S \cup \{\beta\}$ es linealmente independiente.
   - *c*) Probar que si $V \neq 0$ y S es un conjunto finito de generadores de V, entonces S contiene una base de V.
6. (20 pts.) Sean V y W espacios vectoriales y sea $T : V \to W$ una transformación lineal.
   - *a*) Dar la definición del núcleo y de la imagen de T.
   - *b*) Probar que T es inyectiva si y solo si $\operatorname{Nu}(T) = \{0\}$.
   - *c*) Probar que si V y W tienen la misma dimensión finita, entonces T es inyectiva si y solo si es T sobreyectiva si y solo si T es un isomorfismo.

Parte práctica	1	2	3	4	**Total**
Evaluación					

Parte teórica	5	6	**Total**	**Total General**
Evaluación				