Examen Final 03/08/20

Entrega de las respuesta.

- Las respuestas deben ser escritas en birome o lapicera y entregadas en un solo archivo pdf con todas las hojas legibles y numeradas, sin rotar el documento.
- Firmar todas las hojas de su examen antes de digitalizarlo y enviarlo para su correccin. Al final del mismo deberá introducir la leyenda "Por la presente declaro que la resolución de este examen es obra de mi exclusiva autoría y respetando las pautas y criterios fijados en los enunciados. Asimismo declaro conocer el régimen de infracción de los estudiantes cuyo texto ordenado se encuentra en el apéndice de la Res. Rec. 1554/2018", con una foto de su Documento Nacional de Identidad, ocultando su número de trámite, en carácter de Declaración Jurada.
- La resolución de cada ejercicio debe empezar en una nueva página encabezada por el correspondiente enunciado. Al final de la resolución incluir la leyenda "Fin de la resolución" y cruzar con una línea el espacio en blanco que hubiere. Si el ejercicio no es resuelto debe estar el enunciado seguido de la leyenda "No resuelto". Armar el archivo pdf siguiendo la numeración de los enunciados.
- Recordar que luego de subir el pdf a la Tarea en Classroom deben hacer click en el botón "Entregar".
- Las respuestas recibidas después de las 13.30hs no serán corregidas y será considerado/a "AUSENTE".
- El incumplimiento de cualquiera de estos puntos invalidará el examen y será considerado/a "AUSENTE".
- Para digitalizar sus respuestas en formato pdf se recomienda usar aplicaciones de celulares que simulan un escáner ("Tiny Scanner", "FotoScan", "CamScanner", Drive de Google, etc) o un escáner propiamente dicho.

Pautas a tener en cuenta.

- Justificar todas las respuestas.
- Puede usar cualquier método y resultado para responder siempre y cuando esté bien justificado.
- Recuerde indicar en sus respuestas las operaciones elementales por filas que realiza.

Ejercicios

(1) (15 puntos) Sea W el subespacio de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ generado por el conjunto

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(a) Dar una descripción implícita de W.
(b) Dar una base de W que este contenida en S.
(c) Probar que existe al menos una matriz triangular superior no nula que pertenece a W.

(2) (15 puntos) Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la transformación lineal definida por

$$T(x, y, z) = (x - y, x - z).$$

Sean $\mathcal{C}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y $\mathcal{B} = \{(1,1),(1,-1)\}$ base de $\mathbb{R}^2$.

(a) Calcular la matriz $[T]_{\mathcal{CB}}$, es decir la matriz de T respecto de las bases $\mathcal{C}$ y $\mathcal{B}$.
(b) Sea $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Dar las coordenadas de $T(x,y,z)$ respecto de la base $\mathcal{B}$.

(3) (15 puntos)
(a) Una de las siguientes afirmaciones es falsa ¿Cuál? Justificar.

(i) *Existe una transformación lineal* $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *tal que* $\{(1,0,1),(0,1,0)\}$ *es una base de* $\mathrm{Nu}(T)$ *y* $\{(1,0,-1),(0,1,0)\}$ *es una base de la* $\mathrm{Im}(T)$.

(ii) *Existe una transformación lineal* $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *tal que* $\{(1,0,1)\}$ *es una base de* $\mathrm{Nu}(T)$ *y* $\{(1,0,-1),(0,1,0)\}$ *es una base de la* $\mathrm{Im}(T)$.

(b) Definir una transformación que satisfaga las condiciones de la otra afirmación, la que es verdadera.

(4) (15 puntos)
(a) Calcular la inversa de la matriz $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.
(b) Dar una base ordenada $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que P es la matriz de cambio de coordenadas de la base canónica de $\mathbb{R}^3$ a la base $\mathcal{B}$.

(5) (20 puntos)
(a) ¿Qué es un autovalor y un autovector de una transformación lineal?
(b) Enunciar y demostrar el resultado que habla sobre la independecia lineal de autovectores. Indicar la hipotesis principal del enunciado y donde es utilizada en la demostración.
(c) Sea $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal y $v_1, v_2 \in V$ autovectores de T con autovalor $\lambda \in \mathbb{R}$. Probar que si $\{v_1, v_2\}$ es linealmente independiente y $w \in V$, $w \neq 0$, no es autovector de T, entonces $\{v_1, v_2, w\}$ también es linealmente independiente.

(6) (20 puntos)
(a) ¿Qué relación hay entre el determinante de una matriz y el hecho de que la matriz sea inversible?
(b) Enunciar y demostrar dos afirmaciones involucrando las filas de una matriz que le aseguren que dicha matriz sea no inversible.

Ejercicios para libres

(1) (10 puntos) Sean $A, B, C \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tales que $\det A = \pi$, $\det B = 7$ y $\det C = 2$. Calcular $\det(-AB^tC^{-1}A^2)$.

(2) (10 puntos) Decidir si la siguiente afirmación es verdadera o falsa. Existen subespacios vectoriales V y W de $\mathbb{R}^{10}$ de dimensión 6 tales que $V \cap W = 0$.