Examen Final 14/08/20

Entrega de las respuesta.

- Las respuestas deben ser escritas en birome o lapicera y entregadas en un solo archivo pdf con todas las hojas legibles y numeradas, sin rotar el documento.
- Firmar todas las hojas de su examen antes de digitalizarlo y enviarlo para su correccin. Al final del mismo deberá introducir la leyenda "Por la presente declaro que la resolución de este examen es obra de mi exclusiva autoría y respetando las pautas y criterios fijados en los enunciados. Asimismo declaro conocer el régimen de infracción de los estudiantes cuyo texto ordenado se encuentra en el apéndice de la Res. Rec. 1554/2018", con una foto de su Documento Nacional de Identidad, ocultando su número de trámite, en carácter de Declaración Jurada.
- La resolución de cada ejercicio debe empezar en una nueva página encabezada por el correspondiente enunciado. Al final de la resolución incluir la leyenda "Fin de la resolución" y cruzar con una línea el espacio en blanco que hubiere. Si el ejercicio no es resuelto debe estar el enunciado seguido de la leyenda "No resuelto". Armar el archivo pdf siguiendo la numeración de los enunciados.
- Recordar que luego de subir el pdf a la Tarea en Classroom deben hacer click en el botón "Entregar".
- Las respuestas recibidas después de las 13.30hs no serán corregidas y será considerado/a "AUSENTE".
- El incumplimiento de cualquiera de estos puntos invalidará el examen y será considerado/a "AUSENTE".
- Para digitalizar sus respuestas en formato pdf se recomienda usar aplicaciones de celulares que simulan un escáner ("Tiny Scanner", "FotoScan", "CamScanner", Drive de Google, etc) o un escáner propiamente dicho.

Pautas a tener en cuenta.

- Justificar todas las respuestas.
- Puede usar cualquier método y resultado para responder siempre y cuando esté bien justificado.
- Recuerde indicar en sus respuestas las operaciones elementales por filas que realiza.

Ejercicios

(1) (20 puntos) Sean V y W los siguientes subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^5$:

$$V = \left\{(x, y, z, w, t) \in \mathbb{R}^5 \mid x - z - t = 0,\ y - w - t = 0\right\},$$
$$W = \langle\, (1, 0, 1, 0, 0),\ (1, -1, 0, 0, 1),\ (0, -1, 0, 1, 0)\,\rangle.$$

(a) Dar una descripción implícita del subespacio $V \cap W$.
(b) Dar una base de $V \cap W$.
(c) Extender a una base de $V + W$ la base dada en el inciso anterior.

(2) (10 puntos) Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la transformación lineal definida por

$$T(x, y, z) = (z - y, x - z).$$

Sean $\mathcal{C}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y $\mathcal{B} = \{(1, -1), (1, 1)\}$ base ordenada de $\mathbb{R}^2$.

(a) Calcular la matriz $[T]_{\mathcal{C}\mathcal{B}}$, es decir la matriz de T respecto de las bases $\mathcal{C}$ y $\mathcal{B}$.
(b) Sea $S : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación lineal tal que su matriz respecto a las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ es

$$[S]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcular la matriz de la composición $S \circ T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

(3) (15 puntos) Decidir si existen transformaciones lineales como las siguientes. En caso que no, justificar por qué. En caso de ser posible, definir una transformación lineal que satisfaga las condiciones requeridas.
(a) Una transformación lineal $S : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\langle(1,2,3),(2,1,-1)\rangle$ es el autoespacio asociado a 0 y $\langle(3,1,1),(1,1,3)\rangle$ es el autoespacio asociado a 5.

(b) Una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\langle(1,2,3)\rangle$ es el autoespacio asociado a 0 y $\langle(3,1,1)\rangle$ es el autoespacio asociado a 5.

(4) (15 puntos)
(a) Calcular la inversa de la matriz $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.
(b) Sean $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ bases ordenadas de $\mathbb{R}^3$ tales que P es la matriz de cambio de coordenadas de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$. Supongamos que $\mathcal{B}' = \{(1,1,0),(1,0,0),(0,-1,1)\}$. Encontrar $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tal que su vector de coordenadas con respecto a $\mathcal{B}$ es

$$[(x,y,z)]_{\mathcal{B}} = (1,-1,1).$$

(5) (20 puntos)
(a) ¿Qué es un monomorfismo?
(b) Dar y probar una condición necesaria y suficiente para que una transformación lineal sea inyectiva. Indicar en la demostración dónde utiliza dicha condición.
(c) Probar que si T es un monomorfismo, entonces todos sus autovalores son no nulos.

(6) (20 puntos)
(a) ¿Qué son las coordenadas de un vector con respecto a una base ordenada?
(b) Enunciar y demostrar el resultado que hace posible definir el concepto de coordenadas. Indicar la hipótesis principal del enunciado y dónde es utilizada en la demostración.

Ejercicios para libres

(1) (10 puntos) Sean $A, B, C \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ tales que $\det A = \pi$, $\det B = 7$ y $\det C = 2$. Calcular $\det(PQR)$ donde P, Q y R son las matrices que se obtienen a partir de A, B y C mediante operaciones elementales por filas de la siguiente manera

$$A \xrightarrow{F_1+\sqrt{2}F_2} P, \quad B \xrightarrow{\frac{1}{7}F_3} Q \quad \text{y} \quad C \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_4} R.$$

Es decir,
- P se obtiene a partir de A sumando a la fila 1 la fila 2 multiplicada por $\sqrt{2}$.
- Q se obtiene a partir de B multiplicando la fila 3 por $\frac{1}{7}$.

- R se obtiene a partir de C intercambiando las filas 1 y 4.

(2) (10 puntos) Decidir si el conjunto $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$. Justificar.