Álgebra / Álgebra II / Álgebra Lineal

Examen Final 21/12/20

Importante

- Justificá todas tus respuestas.
- No podés usar calculadora, computadora, tablet o celular mientras esté haciendo el examen.
- Copiá todos los enunciados en hojas de papel (o imprimilos). No podrás verlos desde tu celular o computadora durante el examen.
- Para aprobar deberás tener al menos 50 pts. en el total.
- Escribir con birome o lapicera.
- Al finalizar:
  - En cada hoja que entregues escribí, en forma clara y completa, tu nombre y apellido.
  - Cada ejercicio debe empezar en una nueva página encabezada por el correspondiente enunciado. Al final de la resolución incluir la leyenda "Fin de la resolución" y cruzar con una línea el espacio en blanco que hubiere. Si el ejercicio no es resuelto debe estar el enunciado seguido de la leyenda "No resuelto". Armar el archivo pdf siguiendo la numeración de los enunciados.
  - Recordá que también tenés que agregar una hoja con la leyenda *"Por la presente declaro que la resolución de este examen es obra de mi exclusiva autoría y respetando las pautas y criterios fijados en los enunciados. Asimismo declaro conocer el régimen de infracción de los estudiantes cuyo texto ordenado se encuentra en el apéndice de la Res. Rec. 1554/2018"*.
  - Tomá fotos de todas las hojas con el celular (o escanea las hojas) y luego hacé un solo pdf con todas las hojas. Debés verificar que el documento esté en el sentido correcto y que su calidad permita que sea leído y corregido.
  - Subí el archivo pdf en el apartado "Tu Trabajo - Añadir o crear".
  - Una vez subido el archivo, presioná "Entregar".

Preguntas

- Las preguntas sobre el enunciado podés hacerlas en "Comentarios privados".
- Preguntas relacionadas con el desarrollo del ejercicio podés hacerlas en "Comentarios privados".

Ejercicios

(1) (8 puntos) Sea A una matriz $n \times n$ con dos filas iguales o con una fila nula. Probar que $\det(A) = 0$.

(2) (12 puntos) Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial.
   (a) (4 puntos) Dar la definición de subespacio.
   (b) (8 puntos) Probar que si W, U son subespacios de V, entonces $W \cap U$ es también subespacio de V.

(3) (8 puntos) Sea $T : V \to W$ transformación lineal. Probar que si $\mathrm{Nu}(T) = 0$ entonces T es un monomorfismo.

(4) (16 puntos) Sea $V = \mathbb{R}^3$, y sean W_1 y W_2 los siguientes subespacios de V:

$$W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ -2x + y + z = 0\},$$
$$W_2 = \langle (2, 2, -2), (2, -2, 1), (-3, 1, 0) \rangle.$$

   (a) (6 puntos) Dar una base de W_1, y una descripción implícita de W_2.
   (b) (6 puntos) Dar una base del subespacio $W_1 \cap W_2$.
   (c) (4 puntos) Calcular $\dim(W_1 + W_2)$.

(5) (18 puntos)
   (a) Decidir si existe un monomorfismo $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que

$$T(1, -1, 0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad T(1, 1, 2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

   En caso de no existir justificar por qué no existe. En caso de existir, además calcular la matriz $[T]_{\mathcal{CB}}$, donde $\mathcal{C}$ y $\mathcal{B}$ son las bases ordenadas canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^{2\times 2}$, respectivamente.
   (b) Decidir si existe un epimorfismo $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que

$$T(-1, 1, 1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad T(1, -1, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

   En caso de no existir justificar por qué no existe. En caso de existir, además calcular la matriz $[T]_{\mathcal{CB}}$, donde $\mathcal{C}$ y $\mathcal{B}$ son las bases ordenadas canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^{2\times 2}$, respectivamente.

(6) (18 puntos)

(a) (9 puntos) Calcular la inversa de la matriz $P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$.

(b) (9 puntos) Dar una base ordenada $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^4$ tal que P es la matriz de cambio de coordenadas de la base canónica de $\mathbb{R}^4$ a la base $\mathcal{B}$.

(7) (20 puntos) Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida

$$T(x, y, z) = (3x + 2y + 4z, 2x + 3y - 4z, 5z).$$

(a) (8 puntos) Encontrar los autovalores de T.

(b) (8 puntos) Encontrar bases de los autoespacios de T.

(c) (4 puntos) Determinar si T es diagonalizable.

Ejercicios para libres

(Cada ejercicio no resuelto resta 10 puntos)

(1) (10 puntos) Sean $A, B, C \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tales que $\det A = \pi$, $\det B = 7$ y $\det C = 2$. Calcular $\det(-AB^tC^{-1}A^2)$.

(2) (10 puntos) Decidir si la siguiente afirmación es verdadera o falsa. Justificar. Existen subespacios vectoriales V y W de $\mathbb{R}^{10}$ de dimensión 6 tales que $V \cap W = 0$.