Álgebra / Álgebra II / Álgebra Lineal

Examen Final 11/02/21

Importante

- Justificá todas tus respuestas.
- No podés usar calculadora, computadora, tablet o celular mientras estés haciendo el examen.
- Copiá todos los enunciados en hojas de papel (o imprimilos). No podrás verlos desde tu celular o computadora durante el examen.
- Para aprobar deberás tener al menos 50 pts. en el total.
- Escribir con birome o lapicera.
- Al finalizar:
  - En **cada hoja** que entregues escribí, en forma clara y completa, tu nombre y apellido.
  - Cada ejercicio debe empezar en una nueva página encabezada por el correspondiente enunciado. Al final de la resolución incluir la leyenda "Fin de la resolución" y cruzar con una línea el espacio en blanco que hubiere. Si el ejercicio no es resuelto debe estar el enunciado seguido de la leyenda "No resuelto". Armar el archivo pdf siguiendo la numeración de los enunciados.
  - Recordá que también tenés que agregar una hoja con la leyenda *"Por la presente declaro que la resolución de este examen es obra de mi exclusiva autoría y respetando las pautas y criterios fijados en los enunciados. Asimismo declaro conocer el régimen de infracción de los estudiantes cuyo texto ordenado se encuentra en el apéndice de la Res. Rec. 1554/2018"*.
  - Tomá fotos de todas las hojas con el celular (o escanea las hojas) y luego hacé un solo pdf con todas las hojas. Debés verificar que el documento esté en el sentido correcto y que su calidad permita que sea leído y corregido.
  - Subí el archivo pdf en el apartado "Tu Trabajo - Añadir o crear".
  - Una vez subido el archivo, presioná "Entregar".

Preguntas

- Las preguntas sobre el enunciado podés hacerlas en "Comentarios privados".
- Preguntas relacionadas con el desarrollo del ejercicio podés hacerlas en "Comentarios privados".

Ejercicios

(1) (8 puntos) Sean A, B, C matrices $n \times n$ tales que $BA = \mathrm{Id}$ y $AC = \mathrm{Id}$. Probar que $B = C$.

(2) (8 puntos) Sea V espacio vectorial y $\mathcal{B}$ base ordenada. Probar que todo vector se puede escribir de una única forma como combinación lineal de los elementos de $\mathcal{B}$.

(3) (a) (4 puntos) Dar la definición de transformación lineal y de la imagen de una transformación lineal.

(b) (8 puntos) Probar que la imagen de una transformación lineal es un subespacio.

(4) (16 puntos) Sea $V = \mathbb{R}^4$, y sean W_1 y W_2 los siguientes subespacios de V:

$$W_1 = \{(x, y, v, w) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x + y + v + w = 0,\ x + 2y + v + w = 0\},$$

$$W_2 = \langle (1, 1, -1, 1), (4, 2, -3, 1), (5, 1, -3, -1) \rangle.$$

(a) (6 puntos) Dar una base de W_1, y una descripción implícita de W_2.

(b) (6 puntos) Dar una base del subespacio $W_1 + W_2$.

(c) (4 puntos) Calcular $\dim(W_1 \cap W_2)$.

(5) (18 puntos)

(a) Decidir si existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $(1, -1, 0)$ pertenece al $\mathrm{Nu}(T)$ y

$$\mathrm{Im}(T) = \left\langle \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

En caso de no existir justificar por qué no existe. En caso de existir calcular la matriz $[T]_{\mathcal{CB}}$, donde $\mathcal{C} = \{e_1, e_2, e_3\}$ y $\mathcal{B} = \{e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22}\}$ son las bases ordenadas canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^{2\times 2}$, respectivamente.

(b) Decidir si existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $(1, 1, 1)$ pertenece al $\mathrm{Nu}(T)$ y

$$\mathrm{Im}(T) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

En caso de no existir justificar por qué no existe. En caso de existir calcular la matriz $[T]_{\mathcal{CB}}$, donde $\mathcal{C} = \{e_1, e_2, e_3\}$ y $\mathcal{B} = \{e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22}\}$ son las bases ordenadas canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^{2\times 2}$, respectivamente.

(6) (18 puntos)

(a) (10 puntos) Calcular la inversa de la matriz $P = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$.

Se debe calcular P^{-1} paso a paso, haciéndolo con el método explicado en clase.

(b) (4 puntos) Sea

$$\mathcal{B}' = \{(2,1,1,0), (1,1,1,1), (1,2,0,0), (0,0,-1,2)\}$$

base ordenada de $\mathbb{R}^4$. Calcular la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{C}$ ($\mathcal{C}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^4$).

(c) (4 puntos) Sea $\mathcal{B}$ una base ordenada de $\mathbb{R}^4$ tal que P es la matriz de cambio de coordenadas de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$.

Encontrar $(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$ tal que su vector de coordenadas con respecto a la base $\mathcal{B}$ es $[(x, y, z, w)]_{\mathcal{B}} = (1, 2, -2, -1)$.

(7) (20 puntos) Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por

$$T(x, y, z) = (2x + 4y + 2z, 2y, -2y + z).$$

(a) (8 puntos) Encontrar los autovalores de T.

(b) (8 puntos) Encontrar bases de los autoespacios de T.

(c) (4 puntos) Determinar si T es diagonalizable.

Ejercicios para libres

(Cada ejercicio no resuelto resta 10 puntos)

(1) (10 puntos) Determinar todos los valores de $c \in \mathbb{R}$ para los cuales la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & c \end{bmatrix}$ es invertible.

(2) (10 puntos) Decidir si $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$.