

Álgebra / Álgebra II / Álgebra Lineal

Examen Final 25/02/21

Importante

- Justificá todas tus respuestas.
- No podés usar calculadora, computadora, tablet o celular mientras estés haciendo el examen.
- Copiá todos los enunciados en hojas de papel (o imprimilos). No podrás verlos desde tu celular o computadora durante el examen.
- Para aprobar deberás tener al menos 50 pts. en el total.
- Escribir con birome o lapicera.
- Al finalizar:
 - En **cada hoja** que entregues escribí, en forma clara y completa, tu nombre y apellido.
 - Cada ejercicio debe empezar en una nueva página encabezada por el correspondiente enunciado. Al final de la resolución incluir la leyenda “Fin de la resolución” y cruzar con una línea el espacio en blanco que hubiere. Si el ejercicio no es resuelto debe estar el enunciado seguido de la leyenda “No resuelto”. Armar el archivo pdf siguiendo la numeración de los enunciados.
 - Recordá que también tenés que agregar una hoja con la leyenda *“Por la presente declaro que la resolución de este examen es obra de mi exclusiva autoría y respetando las pautas y criterios fijados en los enunciados. Asimismo declaro conocer el régimen de infracción de los estudiantes cuyo texto ordenado se encuentra en el apéndice de la Res. Rec. 1554/2018”*.
 - Tomá fotos de todas las hojas con el celular (o escanea las hojas) y luego hacé un solo pdf con todas las hojas. Debés verificar que el documento esté en el sentido correcto y que su calidad permita que sea leído y corregido.
 - Subí el archivo pdf en el apartado “Tu Trabajo - Añadir o crear”.
 - Una vez subido el archivo, presioná “Entregar”.

Preguntas

- Las preguntas sobre el enunciado podés hacerlas en “Comentarios privados”.
- Preguntas relacionadas con el desarrollo del ejercicio podés hacerlas en “Comentarios privados”.

Ejercicios

- (1) (6 puntos) Sea V espacio vectorial y $\lambda \in \mathbb{K}$. Probar que $\lambda \cdot 0 = 0$.
- (2) (8 puntos) Sea A matriz $n \times n$ tal que A es invertible. Probar que A^{-1} es invertible.
- (3) Sea V espacio vectorial de dimensión finita y sea $T : V \rightarrow V$ una transformación lineal.
- (a) (4 puntos) Definir el polinomio característico de T .
- (b) (10 puntos) Sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Probar que λ es autovalor de T si y sólo si λ es raíz del polinomio característico
- (4) (16 puntos) Sea W el subespacio de $\mathbb{R}_4[x]$ (polinomios de grado estrictamente menor que 4) generado por

$$S = \{1 + x - 3x^2 - 2x^3, 1 - x + x^2 + 2x^3, 1 - 3x + 5x^2 + 6x^3\}.$$

- (a) (6 puntos) Dar una descripción implícita de W .
- (b) (6 puntos) Dar una base de W que este contenida en S .
- (c) (4 puntos) Considere el subespacio $U = \{a + bx^2 + cx^3 : a, b, c \in \mathbb{R}\}$ de $\mathbb{R}_4[x]$. Probar que existe al menos un vector $0 \neq u \in U$ que pertenece a W .
- (5) (18 puntos)
- (a) Definir (dar una expresión explícita) una transformación lineal $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tal que $\langle(0, 0, 1, 1)\rangle$ es el autoespacio asociado a 0, y $\langle(-1, 1, 1, 2)\rangle$ es el autoespacio asociado a 3.
- (b) Dar una base del $\text{Nu}(T)$ e $\text{Im}(T)$.
- (c) Determinar si la transformación lineal dada es un monomorfismo, epimorfismo y/o isomorfismo. Justificar cada caso.

- (6) (18 puntos)

(a) (9 puntos) Calcular la inversa de la matriz $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$.

Se debe calcular P^{-1} paso a paso, haciéndolo con el método explicado en clase.

- (b) (5 puntos) Sean $\mathcal{B}_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ y $\mathcal{B}_2 = \{w_1, w_2, w_3\}$ bases ordenadas de \mathbb{R}^3 , donde

$$v_1 = (1, 1, 2), \quad v_2 = (2, 2, 0), \quad v_3 = (3, 4, -1).$$

Si P es la matriz de cambio de coordenadas de \mathcal{B}_1 a \mathcal{B}_2 , determine $[\text{Id}]_{\mathcal{B}_2\mathcal{C}}$, donde \mathcal{C} es la base canónica de \mathbb{R}^3 .

- (c) (4 puntos) Si \mathcal{B}_1 , \mathcal{B}_2 y P como en (b), determine los vectores de la base \mathcal{B}_2 .

- (7) (20 puntos) Sea $T : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$ la transformación lineal definida por

$$T(A) = A - 2A^t.$$

- (a) (8 puntos) Encontrar los autovalores de T .
 (b) (8 puntos) Encontrar bases de los autoespacios de T .
 (c) (4 puntos) Determinar si T es diagonalizable.

Ejercicios para libres

(Cada ejercicio no resuelto resta 10 puntos)

- (1) (10 puntos) Encontrar, paso a paso, la MERF de la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- (2) (10 puntos) Decidir si la siguiente afirmación es verdadera o falsa. Justificar. Existen subespacios vectoriales V y W de \mathbb{R}^{20} de dimensión 10 tales que $\dim(V \cap W) > 0$.