

Álgebra / Álgebra II / Álgebra Lineal

Examen Final 11/03/21

Importante

- Justificá todas tus respuestas.
- No podés usar calculadora, computadora, tablet o celular mientras estés haciendo el examen.
- Copiá todos los enunciados en hojas de papel (o imprimilos). No podrás verlos desde tu celular o computadora durante el examen.
- Para aprobar deberás tener al menos 50 pts. en el total.
- Escribir con birome o lapicera.
- Al finalizar:
 - En cada hoja que entregues escribí, en forma clara y completa, tu nombre y apellido.
 - Cada ejercicio debe empezar en una nueva página encabezada por el correspondiente enunciado. Al final de la resolución incluir la leyenda “Fin de la resolución” y cruzar con una línea el espacio en blanco que hubiere. Si el ejercicio no es resuelto debe estar el enunciado seguido de la leyenda “No resuelto”. Armar el archivo pdf siguiendo la numeración de los enunciados.
 - Recordá que también tenés que agregar una hoja con la leyenda *“Por la presente declaro que la resolución de este examen es obra de mi exclusiva autoría y respetando las pautas y criterios fijados en los enunciados. Asimismo declaro conocer el régimen de infracción de los estudiantes cuyo texto ordenado se encuentra en el apéndice de la Res. Rec. 1554/2018”*.
 - Tomá fotos de todas las hojas con el celular (o escanea las hojas) y luego hacé un solo pdf con todas las hojas. Debés verificar que el documento esté en el sentido correcto y que su calidad permita que sea leído y corregido.
 - Subí el archivo pdf en el apartado “Tu Trabajo - Añadir o crear”.
 - Una vez subido el archivo, presioná “Entregar”.

Preguntas

- Las preguntas sobre el enunciado podés hacerlas en “Comentarios privados”.
- Preguntas relacionadas con el desarrollo del ejercicio podés hacerlas en “Comentarios privados”.

Ejercicios

- (1) (8 puntos) Sean A y B dos matrices $n \times n$ invertibles. Probar que AB es invertible.
- (2) (8 puntos) Sea $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal, y $\{v_1, \dots, v_n\}$ un conjunto de generadores de V . Probar que si $\{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$ genera a W entonces T es un epimorfismo.
- (3) (a) (4 puntos) Dar la definición de autovalor y autovector de una transformación lineal.
 (b) (8 puntos) Sea V un espacio vectorial y $T : V \rightarrow V$ una transformación lineal. Probar que si v y w son autovectores de T con distintos autovalores, entonces v y w son linealmente independientes.

- (4) (16 puntos) Sea W el subespacio de $\mathbb{R}^{2 \times 3}$ generado por el conjunto

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

- (a) (6 puntos) Dar una descripción implícita de W .
 (b) (6 puntos) Dar una base de W que este contenida en S .
 (c) (4 puntos) Sea V un subespacio de $\mathbb{R}^{2 \times 3}$ de dimensión 5. Probar que existe $A \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$ no nula tal que $A \in V \cap W$.
- (5) (18 puntos)

- (a) (9 puntos) Calcular la inversa de la matriz $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$.

Se debe calcular P^{-1} paso a paso, haciéndolo con el método explicado en clase.

- (b) (3 puntos) Sea $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ la base ordenada de \mathbb{R}^3 , donde

$$v_1 = (0, 1, 2), \quad v_2 = (1, 1, 3), \quad v_3 = (1, 1, 2).$$

Dar la matriz de cambio de coordenadas de la base canónica de \mathbb{R}^3 a la base \mathcal{B} .

- (c) (3 puntos) Sea $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x, y) = (x + 3y, x + 2y, x + y).$$

Calcular la matriz de T en las bases canónicas de \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 .

- (d) (3 puntos) Calcular la matriz de T de la base canónica de \mathbb{R}^2 a la base \mathcal{B} usando las matrices calculadas en los items (b) y (c).
- (6) (18 puntos) Sea $V = \mathbb{R}^3$ y $W = \mathbb{R}_3[x]$ (el espacio de polinómios de grado estrictamente menor a 3). Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.
- (a) (6 puntos) Existe una transformación lineal $T : V \rightarrow W$ tal que

$$T(1, 1, -1) = x, \quad (1, -1, 0) \in \text{Nu}(T) \quad \text{y} \quad x^2 + 1 \in \text{Im}(T).$$
- (b) (6 puntos) Existe una transformación lineal $T : V \rightarrow W$ tal que

$$\{(1, 1, -1), (1, -1, 0)\} \subset \text{Nu}(T) \quad \text{y} \quad \{x, x^2 + 1\} \subset \text{Im}(T).$$
- (c) (6 puntos) Existe dos transformaciones lineales distintas $T : V \rightarrow W$ tales que

$$T(1, 1, -1) = x \quad \text{y} \quad \dim \text{Nu}(T) = 2.$$
- (7) (20 puntos) Sea $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ definida por

$$T(x, y, z, w) = (-x + 2y, 2x - y, z + 3w, 3z + w).$$
- (a) (8 puntos) Encontrar los autovalores de T .
- (b) (8 puntos) Encontrar bases de los autoespacios de T .
- (c) (4 puntos) Determinar si T es diagonalizable.

Ejercicios para libres

(Cada ejercicio no resuelto resta 10 puntos)

- (1) (10 puntos) Sean A , B y C matrices 4×4 , tales que $\det A = 2$, $\det B = -1$ y $\det C = 5$. Calcular $\det(PQR)$ donde P , Q y R son las matrices que se obtienen a partir de A , B y C mediante operaciones elementales por filas de la siguiente manera

$$A \xrightarrow{2F_3} P, \quad B \xrightarrow{-2F_2} Q \quad \text{y} \quad C \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_3} R.$$

Es decir,

- P se obtiene a partir de A multiplicando la fila 3 por 2.
 - Q se obtiene a partir de B multiplicando la fila 2 por -2 .
 - R se obtiene a partir de C intercambiando las filas 1 y 3.
- (2) (10 puntos) Sea $T : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^5$ una transformación lineal tal que $\dim \text{Nu}(T) = 1$. Probar que T es un epimorfismo.