# Examen Final 01/07/21

## Ejercicios

(1) (10 puntos) Determinar para que valores de $x \in \mathbb{R}$ la siguiente matriz es invertible

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 9 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & x \end{pmatrix}.$$

(2) (20 puntos) Sea $W$ el subespacio de $\mathbb{R}^5$ generado por

$$S = \Big\{(1,0,0,1,2), \quad (1,1,0,1,2), \quad (0,0,1,1,1), \quad (1,2,-3,-2,-1)\Big\}.$$

(a) Dar una base de $W$ formada por vectores de $S$.
(b) Dar una descripción implícita de $W$.

(3) (15 puntos) Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}_3[x]$ la transformación lineal definida por

$$T(a,b,c) = ax^2 + (b+c)x + (a-b-c).$$

Sea $\mathcal{C}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y $\mathcal{B} = \{x^2, 1, x\}$ base ordenada de $\mathbb{R}_3[x]$.
(a) Calcular la matriz de $T$ respecto de las bases $\mathcal{C}$ y $\mathcal{B}$.
(b) Sea $\mathcal{B}' = \{(1,1),(1,-2)\}$ una base ordenada de $\mathbb{R}^2$ y $S : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación lineal tal que su matriz de $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{C}$ es

$$[S]_{\mathcal{B}'\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dar la matriz $[T \circ S]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$.
(c) Sea $v = (5,-1) \in \mathbb{R}^2$. Calcular $(T \circ S)(v)$.

(4) (15 puntos) Sea $V$ un espacio vectorial y $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ una base de $V$. Sea $T : V \longrightarrow \mathbb{R}^{2\times 2}$ una transformación lineal tal que

$$T(v_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T(v_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T(v_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$T(v_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad T(v_5) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) ¿$T$ es un epimorfismo? Justificar su respuesta.
(b) ¿$T$ es un monomorfismo? Justificar su respuesta.
(c) Calcular la dimensión del núcleo de $T$.

(5) (20 puntos)
(a) Dar la definición de subespacio vectorial.
(b) Sean $V$ un espacio vectorial y $W_1$ y $W_2$ dos subespacios vectoriales de $V$. Demostrar que $W_1 \cap W_2$ es también subespacio vectorial de $V$.

(6) (20 puntos) Enunciar y demostrar el resultado que da información sobre la independencia lineal de los autovectores de una transformación lineal asociados a diferentes autovalores.

## Ejercicios para libres

(1) (10 puntos) Sean $A, B, C \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tales que $\det A = \pi$, $\det B = \sqrt{7}$ y $\det C = 7$. Calcular $\det(-AB^tC^{-1}B^2)$.

(2) (10 puntos) Decidir si la siguiente afirmación es verdadera o falsa. Existen subespacios vectoriales $V$ y $W$ de $\mathbb{R}^{3\times 3}$ de dimensión 6 tales que $V \cap W = 0$.