Examen Final 26/07/21

Ejercicios

(1) (20 puntos) Sea W el subespacio de $\mathbb{R}^5$ generado por

$$S = \Big\{(-2,1,0,0,0),\ (-2,0,1,0,0),\ (-1,0,0,1,0),\ (-1,0,0,0,1),\ (1,1,-2,-1,2)\Big\}.$$

(a) Dar una descripción implícita de W.

(b) Dar una base de $V \cap W$ donde

$$V = \{(a,b,c,d,e) \in \mathbb{R}^5 \mid c+d+e=0\}.$$

(c) Extender a una base de $\mathbb{R}^5$ la base que dió en el inciso anterior.

(2) (20 puntos) Considere las siguientes bases ordenadas de $\mathbb{R}_3[x]$.

$$\mathcal{B} = \{x^2, x, 1\} \quad \text{y} \quad \mathcal{B}' = \{x^2+2x+3, \quad 4x^2+9x+12, \quad 7x^2+14x+20\}$$

(a) Calcular la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$.

(b) Calcular la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$.

(c) Dar el polinomio $p \in \mathbb{R}_3[x]$ cuyas coordenadas en la base $\mathcal{B}'$ son $[p]_{\mathcal{B}'} = (4,-1,-1)$.

(3) (10 puntos) Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por

$$T(x,y,z) = (x+y, x-z, -y+z)$$

(a) Calcular los autovalores de T.

(b) ¿T es diagonalizable? Justificar su respuesta.

(4) (10 puntos) Sea $T : \mathbb{R}^{2\times 3} \longrightarrow \mathbb{R}^7$ una transformación lineal tal que su núcleo es generado por las matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Calcular la dimensión de la imagen de T.

(b) Sea V un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^7$ tal que $\dim V = 5$. Probar que $V \cap \operatorname{Im} T \neq 0$.

(5) (15 puntos) Sea A una matriz $n \times n$. Probar que si A tiene dos filas iguales o una fila nula, entonces $\det(A) = 0$.

(6) (25 puntos) Dar la definición del núcleo de una transformación lineal y de monomorfismo. Probar que una transformación lineal es un monomorfismo si y sólo si el núcleo es cero.

(1) (10 puntos) Sean A, B y C matrices 4×4, tales que $\det A = -1$, $\det B = 2$ y $\det C = 3$. Calcular $\det(PQR)$ donde P, Q y R son las matrices que se obtienen a partir de A, B y C mediante operaciones elementales por filas de la siguiente manera

$$A \xrightarrow{2F_3} P, \quad B \xrightarrow{-2F_2} Q \quad \text{y} \quad C \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_3} R.$$

Es decir,

- P se obtiene a partir de A multiplicando la fila 3 la por 2.
- Q se obtiene a partir de B multiplicando la fila 2 por -2.
- R se obtiene a partir de C intercambiando las filas 1 y 3.

(2) (10 puntos) Decidir si $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$.