Examen Final 09/08/21

Ejercicios

(1) (20 puntos) Sea $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^{2\times 2}$ la transformación lineal definida por

$$T(x,y,z,w) = \begin{pmatrix} 2x+2y-4w & y+z-w \\ y+z-w & -2x+2z+2w \end{pmatrix}.$$

(a) Dar una descripción implícita de la imagen de T.

(b) Dar una base de la imagen de T.

(c) Sea V un subespacio de $\mathbb{R}^4$ de dimensión 3. Probar que existe $v \in V$, $v \neq 0$, tal que $T(v) = 0$.

(2) (20 puntos) Sea W un subespacio de $\mathbb{R}_3[x]$ con base

$$\mathcal{B} = \left\{3x^2 + x + 1, \quad x^2 - x + 2\right\}$$

(a) Decidir cuál de los siguientes polinomios pertenece W y calcular sus coordenadas con respecto a la base $\mathcal{B}$.

(i) $-3x^2 - 5x + 4$ (ii) $-3x^2 - 2x + 4$

(b) Extender $\mathcal{B}$ a una base de $\mathbb{R}_3[x]$.

(3) (15 puntos) Sea V un espacio vectorial, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ dos bases ordenadas de V y sea

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$.

(a) Calcular la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$.

(b) Sea $v \in V$ con $[v]_{\mathcal{B}} = (1,2,3,4)$. Calcular $[v]_{\mathcal{B}'}$.

(4) (5 puntos) Sea $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal. Probar que si 3 no es un autovalor de T, entonces $T - 3 \cdot \mathrm{Id}$ es un monomorfismo.

(5) (15 puntos) Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Probar que A es invertible si y sólo si el sistema $AX = Y$ tiene una única solución para todo $Y \in \mathbb{R}^n$

(6) (10 puntos) Dar la definición de subespacio vectorial y demostrar que el vector nulo pertenece a todos los subespaios vectoriales.

(7) (15 puntos) Sea V un espacio vectorial y S un subconjunto linealmente independiente. Probar que si $w \notin \langle S\rangle$ entonces $S \cup \{w\}$ es también linealmente independiente.

Ejercicios para libres

(1) (10 puntos) Sean A, B y C matrices 4×4, tales que $\det A = -1$, $\det B = 2$ y $\det C = 3$. Calcular $\det(PQR)$ donde P, Q y R son las matrices que se obtienen a partir de A, B y C mediante operaciones elementales por filas de la siguiente manera

$$A \xrightarrow{2F_3} P, \quad B \xrightarrow{-2F_2} Q \quad \text{y} \quad C \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_3} R.$$

Es decir,
- ◦ P se obtiene a partir de A multiplicando la fila 3 la por 2.
- ◦ Q se obtiene a partir de B multiplicando la fila 2 por -2.
- ◦ R se obtiene a partir de C intercambiando las filas 1 y 3.

(2) (10 puntos) Decidir si $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$.