1) Sea W el subespacio de $\mathbb{K}^4$ generado por el conjunto de vectores

$S = \{(1,1,-1,1),(2,1,0,-1),(-1,1,-3,5),(0,-1,2,-3)\}$

a) (10 puntos) Dar una base de W formada por vectores de S

b) (10 puntos) Extender a una base de $\mathbb{K}^4$ la base que haya dado el ítem anterior

2) Considere el siguiente conjunto de matrices 2×2

$$B=\left\{\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2\\3&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\3&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right\}$$

a) (14 puntos) Calcular las matrices de cambio de base $[Id]_{BC}$ y $[Id]_{CB}$ donde C es la base de $\mathbb{K}^{2\times 2}$ formada por las matrices $\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$

b) (5 puntos) Dar las coordenadas de la matriz $\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$ en la base B

3) Sea $T: \mathbb{K}^4 \to \mathbb{K}^2$ una transformación lineal tal que

$Nu(T) = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{K}^4 \mid x - 5y = 0,\ z - 3w = 0\}$

a) (10 puntos) Calcular la dimensión del nucleo y de la imagen

b) (5 puntos) Decidir si T es un epimorfismo o no. Justificar

4) (6 puntos) Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz cuadrada con coeficientes reales tal que $A^2 + Id = 0$

Probar las siguientes afirmaciones:

a) A es invertible

b) n es par

c) A no tiene autovalores reales.

5) (20 puntos) Sea A una matriz $n \times n$. Probar que si A tiene una fila nula o dos filas iguales, entonces $\det(A)=0$

6) (20 puntos) Enunciar y demostrar el resultado que da información sobre la independencia lineal de los autovectores de una transformación lineal asociados a diferentes autovalores