1	2	3	4	5	6	7
11	8	6	15	12	17	18

CALIF.
9

APELLIDO Y NOMBRE: AGHÁVAC Belgrano Tomás

CONDICIÓN: Libre Regular

Algebra II - Final

6 de diciembre de 2022

Justificar todas las respuestas. No se permite el uso de dispositivos electrónicos. Todos los resultados teóricos utilizados deben ser enunciados apropiadamente; en caso de utilizar resultados teóricos no dados en clase, los mismos deben demostrarse. Para aprobar se debe tener como mínimo 15 pts. en la parte teórica y 35 pts. en la parte práctica para los regulares. Los alumnos libres deberán obtener al menos 40 puntos en la parte práctica.

Parte Teórica (30 pts.)

1. (12 pts) Sea A una matriz de tamaño $n \times n$ con coeficientes en un cuerpo $\mathbb{k}$. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:
   - A es invertible.
   - El sistema $AX = Y$ tiene una única solución para todo $Y \in \mathbb{k}^{n\times 1}$.
   - El sistema homogéneo $AX = 0$ tiene una única solución (la trivial).

2. (12 pts) Sea $\mathbb{k}$ un cuerpo y sean V, W dos $\mathbb{k}$-espacios vectoriales, donde V es de dimensión finita. Sea $f : V \to W$ una transformación lineal. Probar que $\dim(\operatorname{Im} f) = \dim V - \dim(\operatorname{Nu} f)$.

3. Determinar si cada una de las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando en cada caso la respuesta dada.

   (a) (3 pts) Sea $f : V \to W$ una transformación lineal. Sean $v_1, \ldots, v_n \in V$ tales que el conjunto $\{f(v_1), \ldots, f(v_n)\}$ es linealmente independiente. Entonces $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es linealmente independiente.

   (b) (3 pts) Sea V un espacio vectorial de dimension finita. Existe un isomorfismo entre V y V^*.

Parte Práctica (70 pts.)

4. (15 pts) Sea $T : \mathbb{R}[x]_n \to \mathbb{R}[x]_n$ la transformación lineal tal que $T(p(x)) = x\,p'(x) + p(1)$. Pr que $\det T = n!$.

5. (15 pts) Sea $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ una base de un $\Bbbk$-espacio vectorial V y consideramos los vectores

$$v_1 = u_1, \qquad v_2 = u_1 - u_2, \qquad v_3 = u_1 - u_2 + u_3, \qquad v_4 = u_1 - u_2 + u_3 - u_4.$$

Probar que, para cada $n = 2, 3, 4$, el subespacio generado por $u_1, u_2, \cdots, u_n$ coincide con el subespacio generado por $v_1, v_2, \cdots, v_n$. Deducir que $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ también es una base de V.

6. Consideramos la función $\Phi : \mathbb{R}[x]_3 \times \mathbb{R}[x]_3 \to \mathbb{R}$ dada por $\Phi(p, q) = \int_0^2 p(t)q(t)\,dt$.
   (a) (8 pts) Probar que Φ es un producto interno.
   (b) (6 pts) Sea S el subespacio generado por $\{1, 1 + 4t^3\}$. Dar una base ortogonal de S para el producto interno del ítem anterior.
   (c) (6 pts) Dar una base de $S^{\perp}$.

7. Sea $T : \mathbb{R}^{3\times 3} \to \mathbb{R}^{3\times 3}$, $T(A) = A^t$, $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.
   (a) (10 pts) Probar que 1 y -1 son los autovalores de T.
   (b) (10 pts) Dar bases de los correspondientes autoespacios y decidir si T es diagonalizable.

JUSTIFICAR DEBIDAMENTE TODAS LAS RESPUESTAS