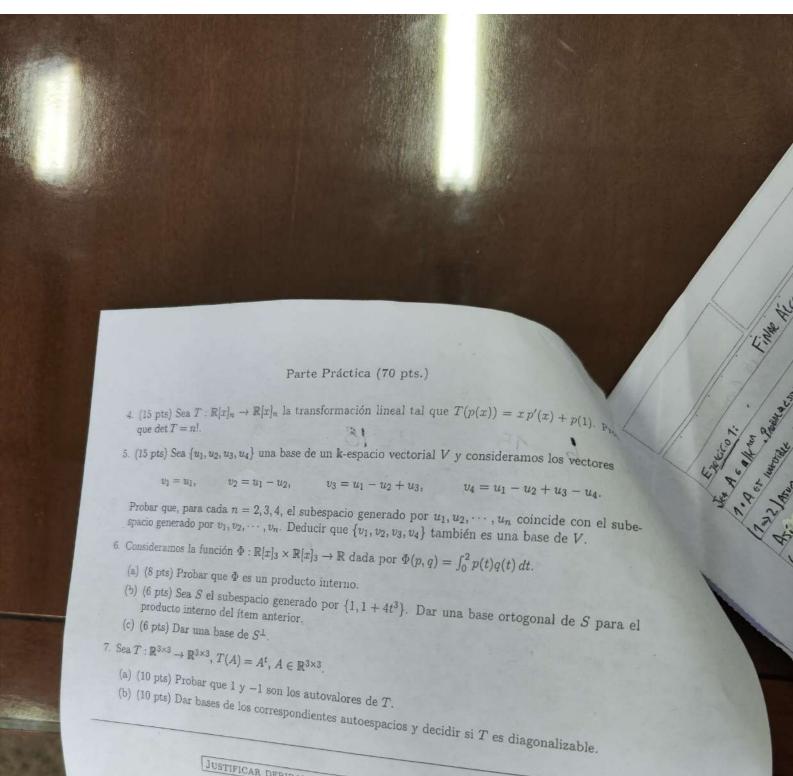


Algebra II - Final 6 de diciembre de 2022

Justificar todas las respuestas. No se permite el uso de dispositivos electrónicos. Todos los resultados teóricos utilizados deben ser enunciados apropiadamente; en caso de utilizar resultados teóricos no dados en clase, los mismos deben demostrarse. Para aprobar se debe tener como mínimo 15 pts. en la parte teórica y 35 pts. en la parte práctica para los regulares. Los alumnos libres deberán obtener al menos 40 puntos en la parte práctica.

## Parte Teórica (30 pts.)

- 1. (12 pts) Sea A una matriz de tamaño  $n \times n$  con coeficientes en un cuerpo k. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:
  - · A es invertible.
  - $\bullet$  El sistema AX=Ytiene una única solución para todo  $Y\in \mathbb{k}^{n\times 1}$
  - ullet El sistema homogéneo AX=0 tiene una única solución (la trivial).
- 2. (12 pts) Sea k un cuerpo y sean V,W dos k-espacios vectoriales, donde V es de dimensión finita. Sea  $f:V\to W$  una transformación lineal. Probar que  $\dim(\mathrm{Im} f)=\dim V-\dim(\mathrm{Nu} f)$ .
- 3. Determinar si cada una de las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando en cada caso la respuesta dada.
  - (a) (3 pts) Sea  $f: V \to W$  una transformación lineal. Sean  $v_1, \ldots, v_n \in V$  tales que el conjunto  $\{f(v_1), \ldots, f(v_n)\}$  es linealmente independiente. Entonces  $\{v_1, \ldots, v_n\}$  es linealmente independiente.
  - (b) (3 pts) Sea V un espacio vectorial de dimension finita. Existe un isomorfismo entre V y  $V^*$ .



JUSTIFICAR DEBIDAMENTE TODAS LAS RESPUESTAS