1	2	3	4	5	6	7
12	12	6	15	15	20	18

Calif.
10

Apellido y Nomb

Condición: Carrera:

Algebra II - Final

21 de diciembre de 2022

Justificar todas las respuestas. No se permite el uso de dispositivos electrónicos. Todos los resultados teóricos utilizados deben ser enunciados apropiadamente; en caso de utilizar resultados teóricos no dados en clase, los mismos deben demostrarse. Para aprobar se debe tener como mínimo 15 pts. en la parte teórica y 35 pts. en la parte práctica para los regulares. Los alumnos libres deberán obtener al menos 40 puntos en la parte práctica.

Parte Teórica (30 pts.)

1. Sea k un cuerpo, V un k-espacio vectorial de dimensión finita, y sean $S, T \subset V$ subespacios.
   - (4 pts) Definir $S + T$, y probar que es un subespacio.
   - (8 pts) Dar una fórmula para $\dim(S+T)$ y demostrarla.
2. Sea k un cuerpo y V, W dos k-espacios vectoriales de dimensión finita. Sean B_1 y B_2 bases de V y W respectivamente, y $f : V \to W$ una transformación lineal.
   - (3 pts) Definir la matriz de f en las bases B_1, B_2 (denotada $[f]_{B_1,B_2}$).
   - (9 pts) Probar que para todo $v \in V$ vale que $[f(v)]_{B_2} = [f]_{B_1,B_2}[v]_{B_1}$.
3. Determinar si cada una de las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando en cada caso la respuesta dada.

   (a) (3 pts) Sea $V = \{\phi \in (\mathbb{C}^4)^* \mid \phi(i, -i, 0, 1) = 0\}$. Existe un monomorfismo $T : \mathbb{C}^{2\times 2} \to V$.

   (b) (3 pts) Sea $T : \mathbb{Q}^6 \to \mathbb{Q}^6$ una transformación lineal tal que $T^4 = 25\,\mathrm{Id}$. Entonces T no posee autovalores.

Parte Práctica (70 pts.)

4. (15 pts) Sean $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $T : \mathbb{R}^{3\times 2} \to \mathbb{R}^{3\times 2}$ la transformación lineal tal que $T(B) = AB$.

   (a) Probar que $T^2 = \mathrm{Id}$. Deducir que, si λ es un autovalor, entonces $\lambda = \pm 1$.

   (b) Hallar los autoespacios asociados a 1 y -1, decidir si T es diagonalizable. .

5. (15 pts) Sea $a \in \mathbb{R}$. Probar que la matriz $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ es inversible si y sólo si $a \neq 1, -1$.

6. Sean $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ el producto interno canónico y $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una transformación lineal tal que $\langle T(v), T(w) \rangle = \langle v, w \rangle$ para todo par de vectores $v, w \in \mathbb{R}^n$.

   (a) (2 pts) Probar que $\|T(v)\| = \|v\|$ para todo $v \in \mathbb{R}^n$.

   (b) (8 pts) Probar que T es un isomorfirmo.

   (c) (10 pts) Sea A la matriz de T con respecto a la base canónica. Probar que $A \cdot A^t = \mathrm{Id}_n$.

7. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y $S, T : V \to V$ dos transformaciones lineales.

   (a) (8 pts) Probar que $\mathrm{Im}\, T \subset \mathrm{Nu} S$ si y sólo si $S \circ T = 0$.

   (b) (4 pts) Asumimos que $S \circ T = 0$. Probar que $(S + T)(\mathrm{Nu} S) \subseteq \mathrm{Im}\, T$.

   (c) (8 pts) Asumimos ahora que $S \circ T = 0$ y que $S + T$ es un monomorfismo. Probar que $\mathrm{Im}\, T = \mathrm{Nu} S$.

JUSTIFICAR DEBIDAMENTE TODAS LAS RESPUESTAS