Algebra II - Final

9 de Febrero de 2022

Justificar todas las respuestas. No se permite el uso de dispositivos electrónicos. Todos los resultados teóricos utilizados deben ser enunciados apropiadamente; en caso de utilizar resultados teóricos no dados en clase, los mismos deben demostrarse. Para aprobar se debe tener como mínimo 15 pts. en la parte teórica y 35 pts. en la parte práctica para los regulares. Los alumnos libres deberán obtener al menos 40 puntos en la parte práctica.

Parte Teórica (30 pts.)

1. (12 pts) Demostrar que si V es un espacio vectorial de dimensión n sobre un cuerpo K, entonces existe un isomorfismo $f : V \to K^n$.

2. (12 pts) Probar que en un espacio vectorial con producto interno un conjunto de vectores ortogonales son linealmente independientes.

3. Determinar si cada una de las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando en cada caso la respuesta dada.

   (a) (3 pts) Toda transformación lineal de un espacio vectorial de dimensión uno en si mismo es un múltiplo escalar de la identidad. V

   (b) (3 pts) Si V un espacio vectorial de dimensión n entonces $\dim \mathrm{Hom}(V, V^*) = n$. V

Parte Práctica (70 pts.)

4. (15 pts) Sea $T : \mathbb{R}[x]_n \to \mathbb{R}[x]_n$ la transformación lineal tal que $T(p(x)) = p'(x)$. Probar que $\det ST = 0$ para toda transformación $S : \mathbb{R}[x]_n \to \mathbb{R}[x]_n$.

5. Sea

$$U = \{p \in \mathbb{R}[x]_4 : p(6) = 0\}.$$

   (a) (7 pts) Mostrar que es un subespacio y hallar una base de U. (Ayuda: si $p \in U$ entonces $p(x) = (x-6)q(x)$, con el grado de q menor o igual a 3).

   (b) (6 pts)Extender la base obtenida en (a) a una base de $\mathbb{R}[x]_4$.

   (c) (7 pts) Encontrar un subespacio W tal que $\mathbb{R}[x]_4 = U \oplus W$.

6. Fijemos $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $T : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$, definida por

$$T(B) = AB - BA$$

para toda matriz B.

   (a) (10 pts) Calcular la matriz $[T]_E$ con E la base canónica de $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

   (b) (10 pts) Calcular los autovalores y autovectores asociados para $[T]_E$ y decidir si es diagonalizable.

7. (15 pts)Sea $(V, \langle\, , \rangle)$ espacio vectorial con producto interno y $v_1, \cdots, v_m$ un conjunto de vectores ortonormales en V. Mostrar que si $v \in V$, entonces

$$||v||^2 = |\langle v, v_1\rangle|^2 + \cdots + |\langle v, v_m\rangle|^2 \quad \Leftrightarrow \quad v \in \langle\{v_1, \cdots, v_m\}\rangle.$$