Nombre y Apellido:

Carrera: LCC - LA - LM - LF - PM - PF - LMA **Condición:** Regular - Libre

Para la aprobación del examen se requiere aprobar por separado la Parte Práctica y la Parte Teórica. Justifique todas sus respuestas.

Parte práctica.

1. (10 pts.) Sea $n \geq 2$ y sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 \end{bmatrix}.$$

   Probar que $\det(A) = n + 1$.

2. (15 pts.) Sean W y U los subespacios de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ definidos como sigue:

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a+b+c & b+2c \\ -b & -a-b \end{pmatrix} : \ a, b, c \in \mathbb{R} \right\}, \qquad U = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} : \ x + t = y + z \right\}.$$

   a) Dar una descripción implícita y una base del subespacio $W \cap U$ y determinar su dimensión.
   b) Probar que $\operatorname{Tr} A = 0$ para toda matriz $A \in W \cap U$.
   c) Hallar un subespacio U' de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $\mathbb{R}^{2\times 2} = U \oplus U'$.

3. (20 pts.) Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por $T(x, y, z) = (x - y, x - z, -y + z)$.

   a) Dar una descripción implícita y una base de $\operatorname{Nu} T$.
   b) Dar una descripción implícita y una base de $\operatorname{Im} T$.
   c) Calcular $[T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$, donde $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ son las bases ordenadas de $\mathbb{R}^3$ dadas, respectivamente, por

$$\mathcal{B} = \{(0, 1, 1), (2, 0, 0), (0, 1, -1)\}, \quad \mathcal{B}' = \{e_1 - e_2, e_1, e_3 - e_1\},$$

   siendo $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base ordenada canónica de $\mathbb{R}^3$.
   d) Determinar los autovalores de T y decidir si T es diagonalizable.

4. (10 pts.) Sea $T : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^3$ una transformación lineal cuyo núcleo está generado por los vectores

$$(i, 0, -1, i), \quad (2, 1, -1, 0), \quad (1, 1, -1 - i, -1).$$

   a) Determinar la dimensión de la imagen de T.
   b) Probar que si W es un subespacio de $\mathbb{C}^3$ tal que $\dim W = 2$, entonces $W \cap \operatorname{Im}(T) \neq \{0\}$.

Parte Teórica.

5. (15 pts.) Sea F un cuerpo y sea $A \in F^{n\times n}$. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

   (i) A es invertible.

   (ii) El sistema homogéneo $AX = 0$ admite solo la solución trivial.

   (iii) El sistema $AX = Y$ admite solución para todo $Y \in F^{n\times 1}$.

6. (15 pts.) Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo F.

   a) Dar la definición de *subconjunto linealmente independiente* de V.

   b) Supongamos que V está generado por un número finito de vectores. Probar que dos bases de V tienen el mismo número de elementos.

7. (15 pts.) Sean V y W espacios vectoriales y sea $T : V \to W$ una transformación lineal.

   a) Completar el siguiente enunciado:

   "T es monomorfismo si y solo si $\mathrm{Nu}(T) = \ldots\ldots$ "

   b) Probar que si V y W tienen la misma dimensión finita, entonces T es monomorfismo si y solo si T es epimorfismo si y solo si T es isomorfismo.

Parte práctica	1	2	3	4	**Total**
Evaluación					

Parte teórica	5	6	7	**Total**	**Total General**
Evaluación					