

Carrera: LCC - LA - LM - LF - PM - PF - LMA

Condición: Regular - Libre

Para la aprobación del examen se requiere aprobar por separado la Parte Práctica y la Parte Teórica. Justifique todas sus respuestas.

**Parte práctica.**

1. (10 pts.) Sea  $A = (A_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  una matriz tal que  $\det(A) = -2$ .

a) Calcular el determinante de la matriz  $A_t = \begin{bmatrix} A_{11} + A_{12}t & A_{11}t + A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} + A_{22}t & A_{21}t + A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} + A_{n2}t & A_{n1}t + A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$ .

b) Hallar todos los valores de  $t \in \mathbb{C}$  tales que  $A_t$  sea invertible.

2. (15 pts.) Sean  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ ,  $n \geq 2$ , escalares no todos nulos y sean  $W_1$  y  $W_2$  los subespacios de  $\mathbb{R}^n$  definidos en la forma:

$$W_1 = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0\}, \quad W_2 = \langle (a_1, \dots, a_n) \rangle.$$

a) Mostrar bases de  $W_1$  y de  $W_2$  y determinar sus dimensiones.

b) Probar que  $\mathbb{R}^n = W_1 \oplus W_2$ .

c) Probar que si  $U$  es un subespacio de  $\mathbb{R}^n$  tal que  $(1, 0, \dots, 0), (0, 0, \dots, 1) \in U$ , entonces  $W_1 \cap U \neq \{0\}$ .

3. (15 pts.) Sea  $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  un operador lineal tal que  $(1, 0, -1, 0)$  y  $(0, 1, -1, 0)$  son autovectores de  $T$  con autovalor  $-1$ ,  $(2, 0, 0, -1)$  es autovector de  $T$  con autovalor  $1$  y  $(0, 0, 1, 0)$  es autovector de  $T$  con autovalor  $2$ .

a) Determinar el polinomio característico y los autoespacios de  $T$ .

b) Dar una fórmula explícita para  $T(x, y, z, t)$ .

c) Sea  $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  la matriz de  $T$  en la base ordenada canónica. Mostrar una matriz invertible  $P$  tal que  $P^{-1}AP$  sea diagonal.

4. (15 pts.) Sea  $V$  un espacio vectorial de dimensión 5 sobre  $\mathbb{R}$  y sea  $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}$  una base de  $V$ . Sea  $T : V \rightarrow \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$  la única transformación lineal que satisface

$$T(\alpha_1) = 1 + x, \quad T(\alpha_2) = 1 + x + x^3, \quad T(\alpha_3) = x - x^2, \quad T(\alpha_4) = x^3, \quad T(\alpha_5) = 1 + x^2,$$

donde  $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$  es el espacio vectorial de las funciones polinomiales de grado menor o igual a 3.

a) Calcular la dimensión del núcleo de  $T$ .

b) Decidir si  $T$  es un epimorfismo o un monomorfismo.

c) Probar que existen bases ordenadas de  $V$  y de  $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$  tales que la matriz de  $T$  con respecto a dichas bases tiene exactamente dos columnas nulas.

**Parte Teórica.**

5. (15 pts.) Sean  $A$  una matriz  $m \times n$  con coeficientes en un cuerpo  $F$ . Probar que si  $m < n$ , entonces el sistema homogéneo  $AX = 0$  tiene soluciones no triviales.
6. (15 pts.) Sea  $V$  un espacio vectorial sobre un cuerpo  $F$ .
- a) Dar la definición de *subespacio generado* por un subconjunto  $S$  de  $V$ .
  - b) Probar que si  $V$  está generado por un conjunto finito de vectores  $\beta_1, \dots, \beta_m$ , entonces todo conjunto linealmente independiente de vectores de  $V$  es finito y contiene a lo sumo  $m$  elementos.
7. (15 pts.) Completar el siguiente enunciado y demostrar:

”Sean  $V$  y  $W$  espacios vectoriales sobre un cuerpo  $F$  y sea  $T : V \rightarrow W$  una transformación lineal. Supongamos que  $V$  es de dimensión finita. Entonces

$$\dim \text{Nu}(T) + \dim \text{Im}(T) = \dots\dots\dots”$$

Parte práctica	1	2	3	4	<b>Total</b>
Evaluación					

Parte teórica	5	6	7	<b>Total</b>	<b>Total General</b>
Evaluación					