Nombre y apellido:

Carrera: LCC - LA - LM - LF - PM - PF - LMA **Condición:** Regular - Libre

Para la aprobación del examen se requiere aprobar por separado la Parte Práctica y la Parte Teórica. Justifique todas sus respuestas.

Parte práctica.

1. (10 pts.) Sea $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ tal que

$$\begin{aligned} &\det A(1|1) = 0, \quad \det A(1|2) = 0, \quad \det A(1|3) = -1,\\ &\det A(2|1) = 0, \quad \det A(2|2) = -i, \quad \det A(2|3) = 0,\\ &\det A(3|1) = i, \quad \det A(3|2) = 0, \quad \det A(3|3) = i, \end{aligned}$$

donde, para todo $1 \leq i, j \leq 3$, $A(i|j)$ es la matriz que se obtiene de A suprimiendo la fila i y a columna j.

   a) Hallar la matriz adjunta de A.

   b) Sabiendo que $\det(A) = 1$, determinar la matriz A.

2. (15 pts.) Sea W el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado los vectores $\alpha_1 = (-3, 1, 0, 0)$, $\alpha_2 = (-2, 0, 1, 0)$ y $\alpha_3 = (1, -1, 1, -1)$.

   a) Probar que $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ es base de W y dar las coordenadas de un vector (x, y, z, t) de W en la base ordenada $\mathcal{B}$.

   b) Extender el conjunto $\mathcal{B}$ a una base de $\mathbb{R}^4$.

   c) Determinar todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ tales que la intersección de W con el subespacio generado por los vectores $(1, 0, a, 0)$ y $(2, 0, -1, -a)$ tenga dimensión 1.

3. (20 pts.) Definir una transformación lineal inyectiva (monomorfismo) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que

$$T(1, 0, -1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad T(-1, 1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   a) ¿Existe una única transformación lineal que cumpla estas condiciones?

   b) Dar la matriz de T con respecto a las bases ordenadas canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

   c) Dar una descripción implícita de la imagen de T, calcular su dimensión y mostrar una base.

4. (10 pts.) Sean $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ el operador lineal definido por

$$T(x, y, z) = (0, x - z, y + 2z).$$

   a) Determinar el polinomio característico y los autovalores de T.

   b) Decidir si T es diagonalizable.

Parte Teórica.

5. (15 pts.) Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo F.

   a) Dar la definición de *subespacio* de V.

   b) Probar que si V es de dimensión finita y W es un subespacio de V entonces todo subconjunto linealmente independiente de W es finito y es parte de una base de W.

6. (15 pts.) Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el cuerpo F y sea $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ una base ordenada de V. Sea W un espacio vectorial sobre F y $\beta_1, \ldots, \beta_n$ vectores cualesquiera de W. Probar que existe una única transformación lineal $T : V \to W$ tal que $T(\alpha_i) = \beta_i$, para todo $i = 1, \ldots, n$.

7. (15 pts.) Sea A una matriz $m \times n$ con coeficientes en un cuerpo F. Probar que el rango fila de A es igual a su rango columna.

Parte práctica	1	2	3	4	**Total**
Evaluación					

Parte teórica	5	6	7	**Total**	**Total General**
Evaluación					