Final de Álgebra / Álgebra II / Álgebra Lineal FaMAF, 06 de diciembre de 2023

Apellido: **Nombre:** **Carrera:**

(1) Sea $\mathbb{k}$ un cuerpo y V, W $\mathbb{k}$-espacios vectoriales.

(a) (*5 pts.*) Dar la definición de transformación lineal de V a W.

(b) (*5 pts.*) Si $T : V \to W$ es una transformación lineal, demostrar que $T(0) = 0$.

(c) (*5 pts.*) Sea $\mathbb{k}$ un cuerpo y consideramos al $\mathbb{k}$-espacio vectorial $M_n(\mathbb{k})$. La función traza: $\mathrm{Tr} : M_n(\mathbb{k}) \to \mathbb{k}$ está dada por

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Demostrar que Tr es una transformación lineal.

(2) Sean $a, b \in \mathbb{R}^3$. Sea P el plano cuya ecuación paramétrica es

$$P = \{t(1, a, b) + s(a, b, -1) + (1, 0, 1) : t, s \in \mathbb{R}\}.$$

(a) (*10 pts.*) Sea L la recta dada de forma paramétrica $L = \{t(1, 1, 0) + (0, 2, 0) : t \in \mathbb{R}\}$. Encontrar **todos** los $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tales que el plano P es perpendicular a la recta L.

(b) (*5 pts.*) Encontrar **todos** los $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tal que $(1, 1, 1)$ **no** pertenezca a P.

(3) (*10 pts.*) Encontrar una matriz $A \in M_2(\mathbb{R})$ tal que

$$A^2 = -I.$$

Si $\epsilon \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$. Demostrar que no existe ninguna matriz $B \in M_2(\mathbb{R})$ tal que

$$B^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 + \epsilon \end{bmatrix}.$$

(4) Consideramos la base $\mathcal{B} = \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 1, 1, -1)\}$ de $\mathbb{R}^4$ y la base canónica $\mathcal{C} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ de $\mathbb{R}^3$. Sea $U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ una transformación lineal tal que

$$[U(x, y, z)]_{\mathcal{B}} = (0, x, y, x).$$

(a) (*10 pts.*) Calcular $U(x, y, z)$.

(b) (*10 pts.*) Calcular la dimensión de la imágen de U.

(5) Sea $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la transformación lineal dada por

$$T(x, y, z, w) = (x - y, 2x + y, 3z + w, z + 3w).$$

(a) (*10 pts.*) Calcular los autovalores reales de T.

(b) (*10 pts.*) Calcular los autoespacios de los autovalores calculados en el punto anterior.

(c) (*5 pts.*) Decidir si T es diagonalizable.

(6) (*10 pts.*) Consideramos el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}_4[x]$. Definamos

$$W = \{p(x) \in \mathbb{R}_4[x] : p(1) = p(2) = 0\}.$$

Calcular la dimensión de W.

(7) (*5 pts.*) Sean V un espacio de dimensión 5 y $\mathcal{B}$ una base de V. Si $S, T : V \to V$ son transformaciones lineales tales que la matriz $[S \circ T]_{\mathcal{B}}$ es igual a:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 6 & 7 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Demostrar que T es un isomorfismo.

1(a)	1(b)	1(c)	2(a)	2(b)	3	4(a)	4(b)

5(a)	5(b)	5(c)	6	7	Total	Nota