Álgebra/Álgebra II/Álgebra Lineal

Examen Final – 1/7/2024

Nombres y apellidos:

Correo UNC: Carrera:

Importante

- Todos los resultados deben estar debidamente justificados, mostrando paso a paso la obtención de los mismos.
- No podés usar calculadora, celular o cualquier otro dispositivo electrónico mientras estés haciendo el examen.
- Los alumnos en Condición Regular no deben resolver el ítem (b) del Ejercicio 3: el puntaje del mismo se les sumará automáticamente por revestir esta condición.

Ejercicios teóricos

(1) (10%) Demostrar que si A, B son matrices $n \times n$ invertibles, entonces AB es una matriz invertible y decir cual es la inversa de AB.

Solución

Es la demostración del teorema 3.4.4 (2) del apunte de la materia: probaremos que que $B^{-1}A^{-1}$ es inversa a izquierda y derecha de AB:

$$(B^{-1}A^{-1})AB = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}\operatorname{Id}_n B = B^{-1}B = \operatorname{Id}_n,$$

y, análogamente, comprobemos que es inversa a derecha,

$$AB(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = A\operatorname{Id}_n A^{-1} = AA^{-1} = \operatorname{Id}_n.$$

Por lo tanto $B^{-1}A^{-1}$ es inversa de AB. □

(2) (10%) Sea T transformación lineal, entonces T es monomorfismo si y sólo si $\operatorname{Nu}(T) = 0$.

Solución

Es la demostración de la proposición 5.3.2 del apunte de la materia.

($\Rightarrow$) Debemos ver que $\operatorname{Nu}(T) = 0$, es decir que si $T(v) = 0$, entonces $v = 0$. Ahora bien, si $T(v) = 0$, como $T(0) = 0$, tenemos que $T(v) = T(0)$, y como T es inyectiva, implica que $v = 0$.

($\Leftarrow$) Sean $v_1, v_2 \in V$ tal que $T(v_1) = T(v_2)$. Entonces

$$0 = T(v_1) - T(v_2) = T(v_1 - v_2).$$

Por lo tanto, $v_1 - v_2 \in \operatorname{Nu}(T)$. Por hipótesis, tenemos que $v_1 - v_2 = 0$, es decir $v_1 = v_2$. □

Ejercicios

(3) (a) (5%) Describir de manera paramétrica el conjunto solución del sistema homogéneo:

$$\begin{cases} 2y + z = 0 \\ -x + y + 2z = 0 \\ x + 3y = 0 \end{cases}$$

(b) (5%) (**solo alumnos libres**) Indicar cuál es la MERF asociada al sistema anterior. Debe justificar la respuesta.

Solución

(a) La matriz asociada al sistema es

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Usando operaciones elementales de filas, obtenemos una MRF asociada al sistema:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2+F_3} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2-2F_1} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1/2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_3-3F_1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3/2 \end{bmatrix}.$$

Luego, el sistema homogéneo asociado es

$$\begin{cases} y + \frac{1}{2}z = 0 \\ 0 = 0 \\ x - \frac{3}{2}z = 0 \end{cases},$$

cuya solución es $x = \frac{3}{2}z$, $y = -\frac{1}{2}z$ con $z \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, el conjunto de soluciones es

$$\begin{aligned} S &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = \frac{3}{2}z,\ y = -\frac{1}{2}z\} \\ &= \left\{ \left(\frac{3}{2}z, -\frac{1}{2}z, z \right) : z \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

(b) La matriz obtenida en el inciso anterior es

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3/2 \end{bmatrix}$$

que es una MRF. Para obtener la MERF permutamos las filas 1 y 3, luego la fila 2 y y la fila 3 y obtenemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

□

(4) (10%) Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ la matriz

(a) Calcular el determinante de A.

(b) Calcular la inversa de A. Usar el método explicado en clase, con operaciones de filas.

Solución

(a) Se puede hacer de varias formas, nosotros lo haremos de dos maneras diferentes.

1° forma. Es por definición, calcularemos el determinante desarrollando por la primera columna:

$$\begin{aligned}
|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} &= 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + (-3) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\
&= 1 \cdot (2 \cdot (-2) - 1 \cdot 1) + (-3) \cdot ((-1) \cdot (-2) - 1 \cdot 2) \\
&= 1 \cdot (-4 - 1) + (-3) \cdot (2 - 2) \\
&= -5.
\end{aligned}$$

2° forma. Con operaciones de filas llevamos a la matriz a una matriz triangular. Luego el determinante es el producto de la diagonal considerando los cambios que introducen las operaciones de fila.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2 - 3F_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3 - F_2/5} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Ninguna de las operaciones de fila que hicimos cambia el determinante, por lo tanto el determinante de A es igual al determinante de la última matriz, que como es triangular superior es el producto de las entradas diagonales. Es decir:

$$|A| = 1 \cdot 5 \cdot (-1) = -5.$$

(b)

$$[A|\operatorname{Id}] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{F_2 - 3F_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[F_2 - 5F_3]{F_1 + F_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -3 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{F_2/5} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3/5 & 1/5 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{F_3 + 2F_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3/5 & 1/5 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -6/5 & 2/5 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{F_3 \leftrightarrow F_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -6/5 & 2/5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3/5 & 1/5 & -1 \end{array}\right].$$

Luego,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -6/5 & 2/5 & -1 \\ -3/5 & 1/5 & -1 \end{bmatrix}.$$

□

(5) (20%) Sean W_1 y W_2 los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}
W_1 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x + y - 2z = 0\}, \\
W_2 &= \langle (1, -1, 1), (2, 1, -2), (3, 0, -1) \rangle.
\end{aligned}$$

(a) Dar una base de W_1 (justificar).
(b) Determinar $W_1 \cap W_2$, y describirlo por generadores y con ecuaciones.

Solución

(a) Para encontrar una base de W_1 primero despejamos la variable x en función de y y z y describimos W_1 de forma paramétrica:

$$\begin{aligned}
W_1 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x+y-2z=0\} \\
&= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x=-y+2z=0\} \\
&= \{(-y+2z, y, z) \ : \ y,z \in \mathbb{R}\} \\
&= \{y(-1,1,0)+z(2,0,1) \ : \ y,z \in \mathbb{R}\}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\{(-1,1,0),(2,0,1)\}$ es un sistema de generadores de W_1. Para ver si es base, calculamos el rango de la matriz cuyas filas son $(-1,1,0)$ y $(2,0,1)$:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2+2F_1} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1+F_2} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Como el rango de la matriz es 2, entonces $\{(-1,1,0),(2,0,1)\}$ es LI y por lo tanto es una base de W_1.

Observación: también podríamos haber probado que $\{(-1,1,0),(2,0,1)\}$ es LI simplemente diciendo que uno de los vectores no es múltiplo del otro.

(b) Para determinar $W_1 \cap W_2$ primero encontramos la descripción implícita de W_2. Partimos de la siguiente descripción paramétrica de W_2:

$$\begin{aligned}
W_2 &= \langle (1,-1,1),(2,1,-2),(3,0,-1) \rangle \\
&= \{x(1,-1,1)+y(2,1,-2)+z(3,0,-1) \ : \ x,y,z \in \mathbb{R}\} \\
&= \{(x+2y+3z, -x+y, x-2y-z) \ : \ x,y,z \in \mathbb{R}\} \\
&= \{(b_1,b_2,b_3) \ : \ b_1 = x+2y+3z, b_2=-x+y, b_3=x-2y-z\}
\end{aligned}$$

Planteamos la matriz correspondienta al sistema de ecuaciones lineales de la última expresión:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ -1 & 1 & 0 & b_2 \\ 1 & -2 & -1 & b_3 \end{array}\right] \xrightarrow[F_2+F_1]{F_3-F_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 0 & 3 & 3 & b_1+b_2 \\ 0 & -4 & -4 & b_3-b_1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{F_3+4F_2/3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 0 & 3 & 3 & b_1+b_2 \\ 0 & 0 & 0 & b_1/3+4b_2/3+b_3 \end{array}\right].$$

Por lo tanto W_2 está definido en forma implícita por

$$W_2 = \{(b_1,b_2,b_3) \in \mathbb{R}^3 \ : \ b_1/3+4b_2/3+b_3=0\},$$

o, escrito de otra forma,

$$W_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x+4y+3z=0\}.$$

Luego, la descripción implícita de $W_1 \cap W_2$ es

$$W_1 \cap W_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x+y-2z=0 \text{ y } x+4y+3z=0\}.$$

Para encontrar un sistema de generadores de $W_1 \cap W_2$ resolvemos el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2-F_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2/3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 5/3 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1-F_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -11/3 \\ 0 & 1 & 5/3 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, $x = 11/3z$ y $y = -5/3z$, con $z \in \mathbb{R}$, y por lo tanto

$$\begin{aligned} W_1 \cap W_2 &= \{(11/3z, -5/3z, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{z(11/3, -5/3, 1) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Es decir $W_1 \cap W_2 = \langle (11/3, -5/3, 1) \rangle$.

□

(6) (20%) Sea $T : P_2 \longrightarrow P_3$, la transformación lineal definida

$$T(ax + b) = (2a + 3b)x^2 + (a + b)x + a - b.$$

(a) Dar una base del núcleo y la imagen de T.
(b) Dar la matriz de T en las bases $\mathcal{B}_2 = \{1, x + 1\}$ y $\mathcal{B}_3 = \{1, 1 + x, 1 + x + x^2\}$ de P_2 y P_3, respectivamente.

Solución

(a) Para encontrar una base del núcleo de T resolvemos la ecuación $T(ax + b) = 0$:

$$T(ax + b) = (2a + 3b)x^2 + (a + b)x + a - b = 0.$$

Igualando coeficientes obtenemos el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 2a + 3b = 0 \\ a + b = 0 \\ a - b = 0 \end{cases}.$$

Resolviendo el sistema obtenemos que $a = b = 0$, por lo tanto el núcleo de T es $\{0\}$ y por lo tanto una base del núcleo de T es $\emptyset$.

Como el $\mathrm{Nu}(T) = 0$, la imagen de una base de P_2 es una base de la imagen de T. Por lo tanto $T(1) = 3x^2 + x - 1$ y $T(x) = 2x^2 + x + 1$ es una base de la imagen de T.

(b) Para encontrar la matriz de T en las bases $\mathcal{B}_2 = \{1, x+1\}$ y $\mathcal{B}_3 = \{1, 1+x, 1+x+x^2\}$ de P_2 y P_3, respectivamente, primero calculamos $T(1)$ y $T(x + 1)$:

$$\begin{aligned} T(1) &= (2 \cdot 0 + 3 \cdot 1)x^2 + (0 + 1)x + 0 - 1 = 3x^2 + x - 1, \\ T(x + 1) &= (2 \cdot 1 + 3 \cdot 1)x^2 + (1 + 1)x + 1 - 1 = 5x^2 + 2x. \end{aligned}$$

La matriz de T en las bases $\mathcal{B}_2$ y $\mathcal{B}_3$ es la matriz $[a_{ij}]$ tal que

$$\begin{aligned} T(1) &= 3x^2 + x - 1 = a_{11}1 + a_{21}(x + 1) + a_{31}(1 + x + x^2), \\ T(x + 1) &= 5x^2 + 2x = a_{12}1 + a_{22}(x + 1) + a_{32}(1 + x + x^2). \end{aligned}$$

Entonces, debemos resolver el sistema de ecuaciones lineales asociados a las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} 3x^2 + x - 1 &= a_{11}1 + a_{21}(x + 1) + a_{31}(1 + x + x^2) \\ &= a_{31}x^2 + (a_{21} + a_{31})x + (a_{11} + a_{21} + a_{31}). \\ 5x^2 + 2x &= a_{12}1 + a_{22}(x + 1) + a_{32}(1 + x + x^2) \\ &= a_{32}x^2 + (a_{22} + a_{32})x + (a_{12} + a_{22} + a_{32}). \end{aligned}$$

Es decir, debemos resolver el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 3 = a_{31} \\ 1 = a_{21} + a_{31} \\ -1 = a_{11} + a_{21} + a_{31} \\ 5 = a_{32} \\ 2 = a_{22} + a_{32} \\ 0 = a_{12} + a_{22} + a_{32} \end{cases}.$$

Resolviendo el sistema obtenemos que $a_{11} = -2$, $a_{12} = -2$, $a_{21} = -2$, $a_{22} = 3$, $a_{31} = 3$, $a_{32} = 5$ y por lo tanto la matriz de T en las bases $\mathcal{B}_2$ y $\mathcal{B}_3$ es

$$[T]_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_3} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

(7) (10%) Sea $A = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$.

(a) Calcular los autovalores de A.

(b) Describir paramétricamente los autoespacios asociados a los autovalores de A, y decidir si A es diagonalizable.

Solución

(a) Para calcular los autovalores de A debemos encontrar las raíces del polinomio característico de A:

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A) &= \det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}\right) \\ &= \det\begin{bmatrix} \lambda - 7 & -1 \\ -2 & \lambda - 8 \end{bmatrix} \\ &= (\lambda - 7)(\lambda - 8) - (-1)(-2) \\ &= \lambda^2 - 15\lambda + 54. \end{aligned}$$

Las raíces de este polinomio son

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{15 \pm \sqrt{15^2 - 4 \cdot 54}}{2} = \frac{15 \pm \sqrt{225 - 216}}{2} = \frac{15 \pm 3}{2} = 9, 6.$$

Por lo tanto, los autovalores de A son 9 y 6.

(b) Para describir paramétricamente los autoespacios asociados a los autovalores de A debemos resolver el sistema de ecuaciones lineales $(A - \lambda I)v = 0$ para $\lambda = 9$ y $\lambda = 6$:

$$\begin{bmatrix} 7-9 & 1 \\ 2 & 8-9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 7-6 & 1 \\ 2 & 8-6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Resolvamos el primer sistema:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2+F_1} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

cuya solución es $x_1 = x_2/2$. Por lo tanto, el autoespacio asociado a $\lambda = 9$ es

$$V_9 = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = x_2/2\right\} = \{t(1,2) : t \in \mathbb{R}\}.$$

Resolvamos el segundo sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2 - 2F_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

cuya solución es $x_1 = -x_2$. Por lo tanto, el autoespacio asociado a $\lambda = 6$ es

$$V_6 = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = -x_2\right\} = \{t(-1,1) : t \in \mathbb{R}\}.$$

$\square$

(8) (10%) Sean $T : \mathbb{R}^3 \to W$ y $S : W \to \mathbb{R}^3$ dos transformaciones lineales entre espacios vectoriales tal que $S \circ T(x, y, z) = (x + y, y + z, x + z)$.

(a) (2%) Probar que $\mathrm{Nu}(S \circ T) = 0$.

(b) (3%) Probar que $S \circ T$ es biyectiva.

(c) (5%) Probar que T es inyectiva.

Solución

(a) Para probar que $Nu(S \circ T) = 0$ debemos probar que la única solución del sistema $(S \circ T)(x, y, z) = (0, 0, 0)$ es $(x, y, z) = (0, 0, 0)$. Es decir, debemos probar que la única solución del sistema $(x + y, y + z, x + z) = (0, 0, 0)$ es $(x, y, z) = (0, 0, 0)$. Se resuelve directamente: $x + y = 0 \Rightarrow x = -y$, $y + z = 0 \Rightarrow z = -y$, luego $x = -y = z$. Como y $x + z = 0 \Rightarrow x = -z$, luego $x = z = 0$ y finalmente $x = y = z = 0$. Por lo tanto $\mathrm{Nu}(S \circ T) = 0$.

(b) Para probar que $S \circ T$ es biyectiva debemos probar que $S \circ T$ es inyectiva y sobreyectiva. Por el inciso anterior, $S \circ T$ es inyectiva. Para probar que $S \circ T$ es sobreyectiva, veremos que la dimensión de la imagen de $S \circ T$ es igual a la dimensión del codominio de $S \circ T$, es decir 3. Por un teorema de la teórica

$$3 = \dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\mathrm{Im}(S \circ T)) + \dim(\mathrm{Nu}(S \circ T)) = \dim(\mathrm{Im}(S \circ T)) + 0,$$

por lo tanto $\dim(\mathrm{Im}(S \circ T)) = 3$ y por lo tanto $S \circ T$ es sobreyectiva.

Observación: también podríamos haber probado que $S \circ T$ es sobreyectiva probando que la ecuación $(S \circ T)(x, y, z) = (a, b, c)$ tiene solución para todo $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

(c) Supongamos que $T(v) = 0$, entonces $S(T(v)) = S(0) = 0$. Como por el inciso anterior $S \circ T$ es inyectiva, entonces $v = 0$. Por lo tanto $\mathrm{Nu}\, T = 0$, lo cual implica que T es inyectiva.

Ejercicio	1	2	3	4
%				
Ejercicio	5	6	7	8
%				

Total %

Nota