1a	1b	1c	2	3a	3b	Suma	4a	4b	5a	5b	6	7a	7b	7c	Suma	Total

Calificación

Apellido y Nombre:

Condición: Libre Regular

Año de regularidad (en caso de ser regular):

Álgebra / Álgebra II / Álgebra Lineal - Final

9 de febrero de 2026

Justificar todas las respuestas. No se permite el uso de dispositivos electrónicos. Todos los resultados teóricos utilizados deben ser enunciados apropiadamente; en caso de utilizar resultados teóricos no dados en clase, los mismos deben demostrarse. Para aprobar se debe tener como mínimo 15 pts. en la parte teórica y 35 pts. en la parte práctica para los regulares. Los alumnos libres deberán obtener al menos 40 puntos en la parte práctica.

Parte Teórica (30 pts.)

1. Sea $\mathbb{k}$ un cuerpo y V un $\mathbb{k}$-espacio vectorial.
   (a) (2 pts) Definir qué quiere decir que un conjunto $\{v_1, \dots, v_r\}$ de elementos de V sea linealmente independiente.
   (b) (5 pts) Probar que si $V = \langle v_1, \dots, v_r \rangle$, y si $\{w_1, \dots, w_s\}$ es un subconjunto linealmente independiente de V, entonces $r \geq s$.
   (c) (5 pts) Definir la dimensión de un espacio vectorial finitamente generado, y probar que dicha definición no depende de ninguna elección.

2. (12 pts) Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, y $b \in M_{m\times 1}(\mathbb{R})$. Denotemos por S al conjunto de soluciones del sistema no homogéneo:
$$S = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \; : \; A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = b \right\}.$$
   Probar que si $S \neq \emptyset$ los elementos de S se pueden escribir como una solución fija más un vector que es solución del sistema homogéneo asociado.

3. Determinar si cada una de las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando en cada caso la respuesta dada.
   (a) (3 pts) Si $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto interno de $\mathbb{R}^n$ y $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una transformación lineal tal que $\langle T(v), T(w) \rangle = \langle v, w \rangle$ para todo par de vectores $v, w \in \mathbb{R}^n$, entonces T es un isomorfismo.
   (b) (3 pts) Sean V un espacio vectorial de dimensión 4 y $T : V \to V$ una transformación lineal que posee 2 autovalores $\lambda_1 \neq \lambda_2$, siendo el autoespacio de λ_1 de dimensión > 2. Entonces T es diagonalizable.

Parte Práctica (70 pts.)

4. Sea $\mathbb{k}$ un cuerpo, consideramos la transformación lineal $T : \mathbb{k}^4 \to \mathbb{k}^4$, $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2, x_3, x_4, x_1)$.

   (a) (9 pts) Si $\mathbb{k} = \mathbb{R}$, hallar los autovalores de T y sus correspondientes autoespacios. Probar que T no es diagonalizable.

   (b) (6 pts) Si $\mathbb{k} = \mathbb{C}$, hallar los autovalores de T y sus correspondientes autoespacios. Probar que T es diagonalizable.

5. En $\mathbb{R}^3$ consideremos la siguiente función $\Phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, dada por

$$\Phi((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) = x_1x_2 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5y_1y_2 + z_1z_2.$$

   (a) (10 pts) Probar que la función Φ define un producto interno en $\mathbb{R}^3$.

   (b) (8 pts) Caracterizar el espacio ortogonal a $(1, 1, 1)$ y dar una base ortogonal de dicho subespacio (con respecto a Φ).

6. (17 pts) Decidir si existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que el núcleo de T sea el subespacio generado por $(1, -1, 1, -1, 1)$, $(1, 2, 3, 4, 5)$ y $(4, -1, 6, 1, 8)$, y cuya imagen sea $\{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} | \operatorname{tr} A = 0\}$. En caso que exista, dar una transformación que cumpla dichas condiciones.

7. Sean V un espacio vectorial de dimensión n, U, W dos subespacios de V tales que $V = U \oplus W$ y $T : V \to V$ una transformación lineal tal que $T(U) \subseteq U$, $T(W) \subseteq W$.

   (a) (7 pts) Probar que existen una base B de V y matrices cuadradas A_1 y A_2 de tamaños r y s, donde $r = \dim U$ y $s = \dim W$, tales que la matriz de T en la base B es $\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$.

   (b) (7 pts) Probar que λ es autovalor de T si y sólo si λ es autovalor de A_1 o de A_2.

   (c) (6 pts) Probar que T es diagonalizable si y sólo si A_1 y A_2 son diagonalizables.

JUSTIFICAR DEBIDAMENTE TODAS LAS RESPUESTAS