

Examen Final

FAMAF, Universidad Nacional de Córdoba | 29 de junio de 2026

Instrucciones:

- El examen consta de una parte práctica (opción múltiple) y una parte teórica (desarrollo).
- Para aprobar hay que obtener al menos el 50% de los puntos de cada una de las dos partes.
- En los ejercicios de opción múltiple, marcar *todas* las opciones correctas en la HOJA de RESPUESTAS.
- Los ejercicios de la parte teórica se entregan en hoja aparte, justificando cada paso.

PARTE PRÁCTICA

Ejercicio I. (36 puntos). En cada ítem, marcar *todas* las opciones correctas.
Sea $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ la transformación lineal definida por

$$T(x, y, z) = (x + z, 2x + y + 3z, y + z, x + y + 2z).$$

1. La matriz de T respecto de las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^4$ es:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

2. Una base de $\text{Nu}(T)$ es:

- (a) $\{(1, 1, -1)\}$. (b) $\{(-1, -1, 1)\}$.
(c) $\{(1, 1, -1), (-1, -1, 1)\}$. (d) $\{(0, 0, 0)\}$.

3. Una descripción (implícita o paramétrica) de $\text{Im}(T)$ es:

- (a) $\{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : 2a - b + c = 0, a - b + d = 0\}$.
(b) $\{s(1, 2, 0, 1) + t(0, 1, 1, 1) : s, t \in \mathbb{R}\}$.
(c) $\{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : 2a - b + c = 0, a + b + d = 0\}$.
(d) $\mathbb{R}^4$.

4. El conjunto de todos los $v \in \mathbb{R}^3$ tales que $T(v) = (1, 2, 0, 1)$ es:

- (a) $\{(1, 0, 0) + t(1, 1, -1) : t \in \mathbb{R}\}$. (b) $\{(0, 1, 0) + t(1, 1, -1) : t \in \mathbb{R}\}$.
(c) $\{(1, 0, 0) + t(1, -1, 1) : t \in \mathbb{R}\}$. (d) $\{t(1, 1, -1) : t \in \mathbb{R}\}$.

Ejercicio II. (27 puntos). En cada ítem, marcar todas las opciones correctas.

1. Sea $T: \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$ la transformación lineal definida por

$$T(a + bx + cx^2) = \begin{pmatrix} a+b & a-c \\ b+c & 2a-b \end{pmatrix},$$

y sean $B_1 = \{1, 1+x, 1+x+x^2\}$ y $B_2 = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, \frac{1}{2}E_{22}\}$ bases de $\mathbb{R}_2[x]$ y $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ respectivamente.

La matriz $[T]_{B_1}^{B_2}$ es:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. (b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. (c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. (d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

2. En $\mathbb{R}^4$, sean

$$S_1 = \{(1, 1, 0, 1), (2, 0, 1, 1), (1, -2, 1, -1)\}, \quad S_2 = \{(1, 1, 1, 1), (1, 0, 1, 0), (2, 1, 2, 1)\},$$

y sean $W_1 = \langle S_1 \rangle$ y $W_2 = \langle S_2 \rangle$. Entonces:

(a) $\dim W_2 = 3$.

(b) $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^4$.

(c) $W_1 \oplus W_2 = \mathbb{R}^4$.

(d) $\{(0, 1, 0, 1)\}$ es una base de $W_1 \cap W_2$.

3. Sea $S_1 = \{v_1, \dots, v_k\} \subset \mathbb{R}^n$ y $S_2 = \{w_1, \dots, w_k\} \subset \mathbb{R}^m$, ambos con k elementos.

(a) Si S_1 es linealmente independiente y $k \leq n$, entonces existe una transformación lineal $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que $T(v_i) = w_i$ para todo i .

(b) Si $k \leq m$, entonces existe una transformación lineal $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que $T(v_i) = w_i$ para todo i .

(c) Si $n > 1$ y $v_1 \neq 0$ entonces existen infinitas transformaciones lineales $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ tales que $T(v_1) = w_1$.

(d) Si S_1 es base, entonces existe una única transformación lineal $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que $T(v_i) = w_i$ para todo i .

Ejercicio III. (27 puntos). Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$. En cada ítem, marcar todas las opciones correctas.

1. El polinomio característico $\chi_A(x)$ es:

(a) $(x-1)(x-2)(x-3)$.

(b) $(x-1)^2(x-3)$.

(c) $(x+1)(x+2)(x+3)$.

(d) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$.

2. Una base del autoespacio V_2 (autovalor $\lambda = 2$) es:

(a) $\{(1, 0, 1)\}$. (b) $\{(1, 1, 0)\}$. (c) $\{(1, 1, 1)\}$. (d) $\{(0, 1, 1)\}$.

3. Una base de autovectores de A es:

(a) $B = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 1)\}$.

(b) $B = \{(1, 1, 0), (2, 0, 2), (3, 3, 3)\}$.

(c) $B = \{(1, 0, 1), (1, 1, 1), (1, 1, 0)\}$.

(d) A no admite una base de autovectores.

Ejercicio IV. (10 puntos). Sea $W = \text{span}\{(1, 1, 0, 1), (1, 0, 1, 1)\} \subset \mathbb{R}^4$ considerado con el producto interno usual. Marcar **todas** las opciones correctas.

(a) El complemento ortogonal $W^\perp$ es $\text{span}\{(-1, 1, 1, 0), (-1, 0, 0, 1)\}$.

(b) La proyección ortogonal de $(1, 0, 0, 0)$ sobre W es: $(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5})$.

(c) La proyección ortogonal de $v = (x + y, x, y, x + y)$ sobre W es v .

(d) Si se aplica el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt al subconjunto ordenado $\{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ se obtiene $\{\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1), \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2), \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)\}$.

PARTE TEÓRICA

Ejercicio V. (34 puntos). Sea $T : V \rightarrow W$ una transformación lineal entre espacios vectoriales de dimensión finita sobre un cuerpo $\mathbb{K}$.

1. Demostrar que T es inyectiva si y solo si $\text{Nu}(T) = \{0\}$.

2. Demostrar que

$$\dim \text{Nu}(T) + \dim \text{Im}(T) = \dim V.$$

Ejercicio VI. (33 puntos).

1. Dar la definición de espacio vectorial con producto interno (indicar la diferencia entre el caso real y complejo).

2. Demostrar que todo subconjunto ortogonal de vectores no nulos es linealmente independiente.

Ejercicio VII. (33 puntos). Decidir si cada afirmación es Verdadera o Falsa, justificando detalladamente la respuesta.

1. La unión de dos subespacios de un espacio vectorial V es siempre un subespacio vectorial de V .

2. Si $T : V \rightarrow V$ es una transformación lineal, v_0, v_1, v_2, v_3 son autovectores de T con autovalores 1, 1, 2, 3 respectivamente y $v_0 + v_1 \neq 0$, entonces $\{v_0 + v_1, v_2, v_3\}$ es linealmente independiente.

3. Si W_1 y W_2 son subespacios de un espacio vectorial con producto interno V , entonces $(W_1 + W_2)^\perp = W_1^\perp \cap W_2^\perp$.