Apellido y Nombre:

Carrera:

3

P1	P2	P3	TOTAL	T1	T2	T3	T4	TOTAL	NOTA

ALGEBRA y ALGEBRA II
EXAMEN de Práctica

PARTE PRÁCTICA Para aprobar hay que sumar por lo menos 5 puntos en esta parte.

(1) **3pts.** En el siguiente ejercicio marcar claramente las respuestas en esta hoja. No es necesario justificar lo marcado.

(a) Una de las siguientes matrices es la inversa (incompleta) de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Decidir cuál es la inversa y completarla.

$$i) \begin{pmatrix} \cdots & -2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & -1 \\ -1/2 & \cdots & -1/2 & -3/2 \end{pmatrix} \qquad ii) \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1/2 & -\frac{3}{2} & -1/2 & -3/2 \end{pmatrix}$$

$$iii) \begin{pmatrix} \cdots & -2 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & -1 \\ -1/2 & \cdots & -1/2 & -3/2 \end{pmatrix} \qquad iv) \begin{pmatrix} \cdots & -2 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & -1 \\ -1/2 & \cdots & -1/2 & -3/2 \end{pmatrix}$$

Preguntar

(b) Sean $\alpha_1 = (1, i, i)$, $\alpha_2 = (1, 0, i)$ y $\alpha_3 = (1, 0, 2+i)$. ¿Cuáles de los siguientes tres vectores es el resultado de aplicar el proceso de Gram Schmidt (sin normalizar) a $B = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} \subset \mathbb{C}^3$.

i) $\beta_1 = (1, i, i)$, $\beta_2 = (\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}i, \frac{1}{3}i)$, $\beta_3 = (-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i, 0, \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i)$.

ii) $\beta_1 = (1, i, i)$, $\beta_2 = (\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}i, \frac{1}{4}i)$, $\beta_3 = (-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i, 0, \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i)$.

iii) $\beta_1 = (1, i, -i)$, $\beta_2 = (\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}i, \frac{1}{3}i)$, $\beta_3 = (-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i, 0, \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i)$.

iv) $\beta_1 = (1, i, i)$, $\beta_2 = (\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}i, \frac{1}{3}i)$, $\beta_3 = (-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i, 1, \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i)$.

(2) **3,5pts.** Sea $T : M_{2\times3}(\mathbb{R}) \to M_{2\times2}(\mathbb{R})$ definida por $T(X) = XA$ donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(a) Dar la matriz de $[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}$ con respecto a las bases canónicas de $M_{2\times3}(\mathbb{R})$ y $M_{2\times2}(\mathbb{R})$ respectivamente.
(b) Dar la base de Nu (T).
(c) Dar la base de Im (T).
(d) Dar la matriz de $[T]_{B}^{\mathcal{C}}$ con respecto a la base canónica de $M_{2\times3}(\mathbb{R})$ y la base

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

de $M_{2\times2}(\mathbb{R})$.

(3) **3,5 pts.** Sean A, B, C y D las siguientes cuatro rectas.
$A = \{(x, y, z) = t(1, 2, 3) + (1, 0, 1)\}$,
$B = \{(x, y, z) = t(2, 0, -1) + (4, 2, 3)\}$,
$C = \{(x, y, z) = t(2, 4, 6) + (-4, -6, -7)\}$,
$D = \{(x, y, z) = t(-2, 0, 1) + (-4, -2, 0)\}$.
(a) Encontrar la ecuación general de un plano que contenga a las cuatro rectas.
(b) Mostrar A y C son paralelas, que B y D son paralelas y encontrar los puntos de intersección $P_1 = A \cap B$, $P_2 = B \cap C$, $P_3 = C \cap D$ y $P_4 = D \cap A$.
(c) Calcular el área del paralelogramo de vértices P_1, P_2, P_3 y P_4.
(d) Calcular la distancia entre A y C.

Apellido y Nombre:

7

PARTE TEÓRICA Para aprobar hay que sumar por lo menos 5 puntos en esta parte.

(4) **3pts.** Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. En cada caso justificar.

(a) Si V es un espacio vectorial de dimensión 2 y $T : V \to V$ es un operador lineal tal que todos sus autovalores son iguales a 1 entonces existe una base B de V tal que $[T]_B = \mathrm{Id}$.

(b) Si $B = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ es base del espacio V entonces $B = \{\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_1, \alpha_2 + \alpha_3\}$ es base de V. Verdad

(c) Sea $V = \mathbb{C}^2$ considerado como espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$. Entonces $T : V \to V$ definida por $T(z_1, z_2) = (\bar{z}_1, \bar{z}_2)$ es lineal. (si $z \in \mathbb{C}$ entonces $\bar{z}$ es el conjugado de z.) Verdadero

(5) **2,5pts.** Sea V un espacio vectorial complejo con producto interno.

(a) Definir operador autoadjunto sobre V.

(b) Demostrar que si c es un autovalor de un operador autoadjunto entonces c es real.

(c) Demostrar que si T es autoadjunto entonces autovectores correspondientes a autovalores distintos son ortogonales.

(6) **3pts.** Sea V un espacio vectorial de dimensión n y $B = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ una base de V. Sea W un espacio vectorial y sean $\beta_1, \ldots, \beta_n \in W$. Demostrar que existe una única transformación lineal $T : V \to W$ tal que $T(\alpha_i) = \beta_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Dar una fórmula para T si tenemos $V = \mathbb{R}^3$, $B = \{(1,0,1), (1,0,0), (0,1,0)\}$, $W = \mathbb{R}^2$, $\beta_1 = (1,1)$, $\beta_2 = (0,0)$ y $\beta_3 = (1,0)$.

(7) **1,5pts.** Sea $V = \mathbb{R}^n$ con el producto interior canónico (producto punto).

(a) Probar que toda funcional lineal $T : V \to \mathbb{R}$ es de la forma $T(\alpha) = \alpha \cdot \beta$ para algún vector β fijo en V.

(b) Demostrar que si T es no nula $\dim(\mathrm{Nu}\, T) = n - 1$.

Ejercicio para Libres

Sea $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la transformación lineal definida como sigue:

$$T(a, b, c, d) = (a - d, c, a + b, a - b).$$

Calcular $[T]_C$ donde C es la base canónica de $\mathbb{R}^4$. Decidir si T es inversible.