PRIMER PARCIAL
26 de abril

Ejercicio 1. [15 ptos.] Consideremos el siguiente sistema homogéneo de ecuaciones lineales sobre $\mathbb{R}$.

$$\begin{cases} w - 2x + y - z = 0 \\ -2w + x - z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

(a) Escribir la matriz de coeficientes del sistema y encontrar la (única) MERF equivalente a ella.

(b) Decir si el sistema tiene una única solución o tiene infinitas. Si tiene infinitas parametrizarlas.

Ejercicio 2. [15 ptos.] La siguiente matriz A es inversible. Hallar su inversa y resolver el sistema $AX = b$, donde $b = (1, -1, 2)$.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 3. [20 ptos.] Consideremos el siguiente sistema no homogéneo de ecuaciones lineales sobre $\mathbb{R}$.

$$\begin{cases} 2x + z = 1 \\ x - y + 2z = 1 \\ 2y - 3z = a \end{cases}$$

(a) Decir si alguna de la siguientes 3-uplas es solución del sistema para $a = -1$, $a = 0$ ó $a = 1$:

$$v_1 = (1, 1, 1/2); \qquad v_2 = (0, 1, 1); \qquad v_3 = (1, 1, -1).$$

(b) Escribir la matriz ampliada del sistema y reducirla por filas.

(c) Decir para qué valores de a el sistema tiene solución, y en ese caso decir si tiene una única o infinitas. Si tiene infinitas parametrizarlas.

Ejercicio 4. [25 ptos.] Decir si las siguientes afirmaciones son Verdaderas o Falsas y justificar.

(a) Si V es un espacio vectorial y W_1 y W_2 son dos subespacios distintos de V, entonces $W_1 \cup W_2$ es un subespacio de V.

(b) Si $v + w$ y $v - w$ son LI, entonces v y w son LI.

(c) Si A es una matriz $n \times m$ con coeficientes en un cuerpo $\mathbb{K}$ infinito, $n < m$ y el sistema $AX = b$ tiene una solución, entonces tiene infinitas.

(d) El vector $(i, -1, -i) \in \mathbb{C}^3$, está en el subespacio generado por $\{(1, 1, 1), (1, i, -1)\}$ (como $\mathbb{C}$-espacio vectorial).

(e) Sean A y B dos matrices cuadradas 2×2 sobre $\mathbb{Z}_2$. Entonces A y B son inversibles si y solo si $A + B$ es inversible.

Elegir y hacer uno solo de los siguientes dos ejercicios.

Ejercicio 5A. [25 ptos.] Sea V el espacio vectorial real de polinomios de grado ≤ 4 y sean $W_1 = \{p(x) : p'(0) = p''(0),\, p(0) = p(1)\}$ y $W_2 = \{p(x) : p'(0) = p''(0),\, p(0) = p(1) + 1\}$.

(a) Mostrar que W_1 es subespacio vectorial de V y que W_2 no.

(b) Mostrar que $q(x) = a+bx+cx^2+dx^3+ex^4$ está en W_1 si y solo si $b = 2c$ y $b+c+d+e = 0$.

(c) Resolver el sistema de dos ecuaciones enterior y dar una parametrización del subespacio W_1.

(d) Dar una base de W_1.

Ejercicio 5B. [25 ptos.] Sean V y W los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^4$:

$$V = \langle (1,1,1,1), (1,1,1,0), (1,1,0,0) \rangle, \quad W = \langle (1,-1,1,-1), (-2,0,1,0) \rangle.$$

(a) Probar que $V \cap W \neq 0$ y dar una base de $V \cap W$.

(b) Probar que $V + W = \mathbb{R}^4$ y dar una base de $\mathbb{R}^4$ formada por algunos de los vectores dados.

(c) Dar dos vectores distintos de $\mathbb{R}^4$ que no estén en V ni en W.

(d) Escribir a $v = (1,2,3,4)$ como suma de un vector en V y de otro en W.