Facultad de Matemática, Astronomía y Física
Universidad Nacional de Córdoba

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

FAMAF

Álgebra / Álgebra II
Primer parcial - 14/05/2015

Nombre y apellido: **Carrera:**

Justifique todas las respuestas.

1. (20 pts.)

   a) Determinar todos los valores de $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que el sistema de ecuaciones

   $$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = a \\ x_1 - x_4 = b \\ x_2 + 2x_3 - 2x_4 = c \end{cases}$$

   tenga solución.

   b) Hallar el conjunto de soluciones del sistema del inciso *a*) en el caso en que $a = b = 1$, $c = 0$.

2. (20 pts.) Sea $z \in \mathbb{C}$ y sea $A(z) = \begin{pmatrix} z & i & 1+i \\ 1-i & 0 & z \\ 0 & z-i & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$.

   a) Probar que $A(0)$ es inversible y calcular su inversa.

   b) Usando la función determinante, hallar todos los valores de $z \in \mathbb{C}$ tales que la matriz $A(z)$ sea inversible.

3. (25 pts.) Sean W_1 el subespacio de $\mathbb{R}^5$ generado por el conjunto

   $$\{(1,1,1,0,0), (0,1,1,1,0), (0,0,1,1,1), (1,0,0,-1,0), (0,1,0,0,-1)\}$$

   y W_2 el subespacio de $\mathbb{R}^5$ definido por

   $$W_2 = \{(x,y,z,t,u) : x + z - u = 0, \text{ y } y + t - u = 0\}$$

   a) Dar una base del subespacio W_2 y calcular su dimensión.

   b) Caracterizar con ecuaciones el subespacio W_1. ¿Tiene W_1 dimensión 5?

   c) Dar una base de $W_1 \cap W_2$ y calcular su dimensión.

   d) Decidir si $\mathbb{R}^5 = W_1 \bigoplus W_2$.

4. (15 pts.) Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

   a) Si $A \in F^{m\times n}$ y $B \in F^{n\times k}$ son matrices tales que la i-ésima fila de A es nula, entonces i-ésima fila de AB es nula.

   b) Si $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, entonces $\det(A+B) = \det A + \det B$.

   c) Si W_1 y W_2 son subespacios de un espacio vectorial V, entonces $W_1 \cup W_2$ es un subespacio de V.

5. (10 pts.) Sea F un cuerpo y sea $n \in \mathbb{N}$. Probar que si $R \in F^{n\times n}$ es una matriz escalón reducida por filas tal que R no tiene filas nulas, entonces $R = I_n$.

6. (10 pts.) Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo F.

   a) Dar la definición del subespacio generado por $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, donde $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in V$.

   b) Dar la definición de subconjunto linealmente independiente de V.