Álgebra/Álgebra II/Álgebra Lineal - 2024/1

Parcial 1 - Tema 1

Nombre y apellido: Lautaro Bachmann

Correo UNC: lautaro.bachmann@mi.unc.edu.ar

Puntos 100

Ejercicios

(1) (20 pts)

20p

(a) Pruebe que los vectores en $\mathbb{R}^3$, $v = (1, 2, -3)$ y $w = (3, -1, 1/3)$ son ortogonales.

(b) Encuentre el valor de a y b para que el vector $u = (a, 4, b)$ sea ortogonal a v y w.

35 (2) (35 pts) Describir implícitamente el conjunto de los vectores (b_1, b_2, b_3, b_4) para los cuales el siguiente sistema tiene solución.

$$\begin{cases} 3x + 6y + 3z + 15w = b_1 \\ x + 2y + 3w = b_2 \\ 2x + 4y + z + 8w = b_3 \\ -x - 2y + z - w = b_4 \end{cases}$$

25 (3) (25 pts) Describir paramétricamente todas las soluciones del sistema

$$\begin{cases} 3x + 6y + 3z + 15w = 0 \\ x + 2y + 3w = 0 \\ 2x + 4y + z + 8w = 0 \\ -x - 2y + z - w = 0 \end{cases}$$

(4) (20 pts) Dadas las matrices

20pts

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & a \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 5 & -5 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & -3 \end{bmatrix},$$

(a) calcular $AB + C$.

(b) Sabiendo que $\mathrm{Tr}(AB + C) = 25$, determinar el valor de a.

10

Escaneado con CamScanner

cro Bachmann

Parcial 1 - Tema 1

1) a)

Planteo:

Para probar que los vectores v y w son ortogonales, debemos comprobar que su producto escalar es igual a 0.

Desarrollo:

$$\langle v, w \rangle = 0 \Rightarrow \langle (1,2,-3),(3,-1,1/3) \rangle = 0$$

$$\Rightarrow 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) + (-3) \cdot \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow 3 - 2 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \cancel{3} - \cancel{3} = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

Conclusión:

Como el producto escalar de v y w dio como resultado 0, queda demostrado que v y w son ortogonales.

b)

Planteo:

Para determinar el valor de a y b tales que el vector u sea ortogonal a v y w podemos plantear un sistema de ecuaciones donde $\langle u, v \rangle = 0$ y $\langle u, w \rangle$ sea igual a cero también.

Escaneado con CamScanner

Desarrollo:

$\langle u, v\rangle = 0 \Rightarrow \langle (a,4,b),(1,2,-3)\rangle = 0$

$\Rightarrow a.1 + 4.2 + b.-3 = 0$

$\Rightarrow a + 8 - 3b = 0$

$\Rightarrow a - 3b = -8 \quad (*)$

$\langle u, w\rangle = 0 \Rightarrow \langle (a,4,b),(3,-1,1/3)\rangle = 0$

$\Rightarrow 3a + 4\cdot(-1) + \frac{1}{3}b = 0$

$\Rightarrow 3a - 4 + \frac{1}{3}b = 0$

$\Rightarrow 3a + \frac{1}{3}b = 4 \quad (**)$

∴ tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} a - 3b = -8 \\ 3a + \frac{1}{3}b = 4 \end{cases}$$

Resolvamos usando matrices:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -8 \\ 3 & \frac{1}{3} & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{F_2 - 3F_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -8 \\ 0 & \frac{1}{3}+9 & 28 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{3}{28}\cdot F_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -8 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{F_1 + 3F_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$4 - (3.-8) = 4 + 24 = 28$

$\frac{1}{3} + \frac{9}{} = \frac{1+27}{3} = \frac{28}{3}$

$\frac{\cancel{3}}{\cancel{28}} \cdot \frac{\cancel{28}}{\cancel{3}} = 1$

$\frac{3}{\cancel{28}} \cdot \cancel{28} = 3$

$-8 + 3.3 = 1$

- llegamos a lo siguiente

$a = 1$

$b = 3$

Conclusion:

El valor de a y b para que el vector u sea ortogonal a v y w es

$a = 1$ y $b = 3$

2)

Planteo:

Armaremos una matriz asociada al sistema de ecuaciones y realizaremos operaciones elementales por fila hasta llegar a una ~~matriz~~ MERF

Desarrollo:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 6 & 3 & 15 & b_1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & b_2 \\ 2 & 4 & 1 & 8 & b_3 \\ -1 & -2 & 1 & -1 & b_4 \end{array}\right] \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & b_2 \\ 3 & 6 & 3 & 15 & b_1 \\ 2 & 4 & 1 & 8 & b_3 \\ -1 & -2 & 1 & -1 & b_4 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{F_2 - 3F_1} \\ \xrightarrow{F_3 - 2F_1} \\ \xrightarrow{F_4 + F_1} \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & b_2 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & b_1 - 3b_2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & b_3 - 2b_2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & b_4 + b_2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{F_4 - F_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & b_2 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & b_1 - 3b_2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & b_3 - 2b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_4 + b_2 - b_3 + 2b_2 \end{array}\right] \xrightarrow{F_2 - 3F_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_1 - 3b_2 - 3.(b_3 - 2b_2) \\ 0 & 0 & 1 & 2 & b_3 - 2b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_4 + b_2 - b_3 + 2b_2 \end{array}\right]$$

Escaneado con CamScanner

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_1-3b_2-3.(b_3-2b_2) \\ 0 & 0 & 1 & 2 & b_3-2b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_4+b_2-b_3+2b_2 \end{array}\right]$$

$b_1-3b_2-3.(b_3-2b_2)$
$=b_1-3b_2-3b_3+3.2b_2$
$=b_1+3b_2-3b_3$

$b_4+b_2-b_3+2b_2=$
$b_4+3b_2-b_3$

✓

$$\xrightarrow{F_3 \leftrightarrow F_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & b_3-2b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_1+3b_2-3b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_4+3b_2-b_3 \end{array}\right]$$

Como F_3 y F_4 son nulas, para que existe solucion $b_1+3b_2-3b_3$ debe ser igual a cero, de la misma forma que $b_4+3b_2-b_3$ ✓

∴ el conjunto de vectores para los que el sistema tiene solución es:

$$S=\{(b_1,b_2,b_3,b_4)\in\mathbb{R}^4 / b_1+3b_2-3b_3=0 ; b_4+3b_2-b_3=0\}$$ ✓

Escaneado con CamScanner

~~Armemos la matriz asociada al sistema de ecuaciones; y reduzcamos a su MERF~~

Como el sistema de ecuaciones es identico al del punto anterior, partamos desde la matriz a la que llegamos en dicho punto.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Veamos como se vería esto en forma de sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 0 \cancel{\Rightarrow -x_1 + 2x_2 = -3x_4 \Rightarrow \frac{-x_1 - 2x_2}{3} = x_4} \\ x_3 + 2x_4 = 0 \cancel{\Rightarrow x_3 = -2x_4 \Rightarrow \frac{-x_3}{2} = x_4} \\ 0 = 0 \checkmark \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 0 \Rightarrow x_1 = -2x_2 - 3x_4$

$x_3 + 2x_4 = 0 \Rightarrow x_3 = -2x_4$, tomando $x_2 = s$ y $x_4 = t$ ....

$\therefore$ el conjunto de soluciones es:

$$\{(-2s-3t, s, -2t, t) / s, t \in \mathbb{R}\} \checkmark$$

Escaneado con CamScanner

4) a)

Primero calculemos AB

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & a \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 5 & -5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} \langle (0,1,a),(0,3,5)\rangle & \langle (0,1,a),(-4,2,-5)\rangle & \langle (0,1,a),(1,-1,1)\rangle \\ \langle (0,3,1),(0,3,5)\rangle & \langle (0,3,1),(-4,2,-5)\rangle & \langle (0,3,1),(1,-1,1)\rangle \\ \langle (2,3,1),(0,3,5)\rangle & \langle (2,3,1),(-4,2,-5)\rangle & \langle (2,3,1),(1,-1,1)\rangle \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0+3+5a & 0+2-5a & 0-1+a \\ 0+9+5 & 0+6-5 & 0+(-3)+1 \\ 0+9+5 & -8+6-5 & 2+(-3)+1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3+5a & 2-5a & -1+a \\ 14 & 1 & -2 \\ 14 & -7 & 0 \end{bmatrix}$$ Bien!

Ahora calculemos $AB + C$:

$$\begin{bmatrix} 3+5a & 2-5a & -1+a \\ 14 & 1 & -2 \\ 14 & -7 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+5a-1 & 2-5a+3 & -1+a+5 \\ 14+2 & 1+0 & -2-2 \\ 14+1 & -7+3 & 0-3 \end{bmatrix}$$

Escaneado con CamScanner

ero Bachmann

$$\begin{bmatrix} 3+5a-1 & 2-5a+3 & -1+a+5 \\ 14+2 & 1+0 & -2-2 \\ 14+1 & -7+3 & 0-3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2+5a & 5-5a & a+4 \\ 16 & 1 & -4 \\ 15 & -4 & -3 \end{bmatrix}}_{AB+C}$$

Bien!

b) $Tr(AB+C) = 25 \Rightarrow 2+5a+1-3 = 25$ ✓

Ahora despejemos a:

$$2+5a+1-3 = 25 \Rightarrow 5a = -2-1+3+25$$

$$\Rightarrow 5a = \cancel{-3}+\cancel{3}+25 = 5a = 25$$

$$\Rightarrow a = \frac{\cancel{25}^{5}}{\cancel{5}_{1}} \Rightarrow a = 5$$ ✓

Bien!

Finalmente, tenemos que el valor de a es 5 ✓