SEGUNDO PARCIAL
10 de junio

Ejercicio 1. [20 ptos.] Sea T la transformación lineal de $\mathbb{R}^4$ en $\mathbb{R}^4$ definida por $T(w,x,y,z) = (w-y+z, 2w-x+y, w-y+z, 2w-x+y)$.

(a) Determinar el núcleo de T y dar una base del mismo.
(b) Determinar la imagen de T y dar una base de la misma.
(c) Decir si los vectores $(1,3,1,0)$ y $(0,1,1,1)$ están en el núcleo de T.
(d) Dar, si existe, un vector en la imagen de T cuya primera coordenada sea 1.
(e) Calcular la intersección del núcleo y la imagen de T.

Ejercicio 2. [20 ptos.] Definir una transformación lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ tal que:

(a) $\dim \ker T = 1$.
(b) $(1,0,-1) \in \operatorname{Im} T$.
(c) La imagen de todos los vectores de la base canónica sea no nula.
(d) El vector $(1,1,1)$ sea autovector de autovalor -2.

Ejercicio 3. [20 ptos.] Calcular el determinante de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 4. [20 ptos.] Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

(a) Mostrar que $(2,0,1)$ es autovector de A. ¿De qué autovalor?
(b) Calcular el polinomio característico de A.
(c) Calcular los autovalores de A.
(d) Para cada autovalor dar una base de autovectores del espacio propio correspondiente.
(e) ¿Es A diagonalizable?

Ejercicio 5. [20 ptos.] Decir si las siguientes afirmaciones son Verdaderas o Falsas y justificar.

(a) Sea A una matriz cuadrada. Si el polinomio característico de A es $p_A(x) = xq(x)$ para algún polinomio q, entonces A no es inversible.
(b) Una matriz cuadrada con todos unos y ceros inversible en $\mathbb{Z}_2$, es inversible en $\mathbb{R}$.
(c) Una matriz cuadrada con todos unos y ceros inversible en $\mathbb{R}$, es inversible en $\mathbb{Z}_2$.
(d) Para todo par de matrices cuadradas A y B, $\det(AB^t) = \det(A)\det(B)$.