1. Sea $T\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^{2\times 2}$ la transformación lineal dada por

$$T(x,y,z) = \begin{pmatrix} x+y+z & 2x-z \\ x-y+z & z-3y-2x \end{pmatrix}, \qquad\qquad x,y,z \in \mathbb{R}.$$

Calcular $[T]_{B_1,B_2}$, donde las bases B_1 y B_2 son $B_1 = \{(1,1,0),(0,1,1),(1,0,1)\}$,

$$B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \right\}.$$

Solución. Por definición de $[T]_{B_1,B_2}$ debemos aplicar T a los elementos de B_1 y expresarlos como combinación lineal de los elementos de B_2. Es conveniente considerar la base intermedia

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

pues $[T]_{B_1,B_2} = \mathcal{C}(C,B_2)[T]_{B_1,C}$. Donde $\mathcal{C}(C,B_2)$ denota la matriz de cambio de base de C a B_2.

Tenemos

$$T(1,1,0) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + (-5)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$T(0,1,1) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + (-2)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$T(1,0,1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Luego $[T]_{B_1,C}$ se obtiene de poner estas coordenadas como columnas de una matriz.

$$[T]_{B_1,C} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -5 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Por otro lado, $\mathcal{C}(C,B_2) = \mathcal{C}(B_2,C)^{-1}$. $\mathcal{C}(B_2,C)$ se obtiene escribiendo los elementos de B_2 en la base C. Expandiendo obtenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por ende

$$\mathcal{C}(B_2, C) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{C}(C, B_2) = \mathcal{C}(B_2, C)^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & -2 \\ -3 & 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Finalmente

$$[T]_{B_1,B_2} = \mathcal{C}(C, B_2)[T]_{B_1,C} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 13 & 10 & 9 \\ 8 & -1 & -1 \\ 9 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Sea $T\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la siguiente transformación lineal:

$$T(x, y, z) = (5x - y + 5z, 2y, 2y - 6x - 6z), \qquad x, y, z \in \mathbb{R}.$$

(a) Calcular los autovalores de T y sus correspondientes autoespacios.
(b) Decidir si T es diagonalizable. En caso que lo sea, dar una base B de $\mathbb{R}^3$ tal que la matriz de T en dicha base sea diagonal.

Solución. Para realizar los cálculos es conveniente expresar a T como matriz en la base canónica C. Aplicamos T a dicha base, y colocamos el resultado como columna de una matriz

$$[T]_C = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \\ -6 & 2 & -6 \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico es por definición $p(\lambda) = \det(\lambda I - [T])$, es decir

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det\begin{pmatrix} \lambda - 5 & 1 & -5 \\ 0 & \lambda - 2 & 0 \\ 6 & -2 & \lambda + 6 \end{pmatrix} = \lambda^3 - \lambda^2 - 2\lambda \\ &= \lambda(\lambda + 1)(\lambda - 2). \end{aligned}$$

Por lo que los autovalores de T son $\{0, -1, 2\}$. Calculamos ahora los autoespacios $V_\lambda = \mathrm{Nu}(\lambda I - T)$. Concretamente

$$V_0 = \mathrm{Nu}\begin{pmatrix} -5 & 1 & -5 \\ 0 & -2 & 0 \\ 6 & -2 & 6 \end{pmatrix} = \langle(-1, 0, 1)\rangle,$$

$$V_{-1} = \mathrm{Nu}\begin{pmatrix} -6 & 1 & -5 \\ 0 & -3 & 0 \\ 6 & -2 & 5 \end{pmatrix} = \langle(-5, 0, 6)\rangle,$$

$$V_2 = \mathrm{Nu}\begin{pmatrix} -3 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & -2 & 8 \end{pmatrix} = \langle (1,3,0) \rangle.$$

El conjunto $B = \{(-1,0,1),(-5,0,6),(1,3,0)\}$ es linealmente independiente pués consiste en autovectores asociados a autovalores diferentes. Como $|B| = 3 = \dim \mathbb{R}^3$, B es una base de autovectores para T. Luego T es diagonalizable y

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Es decir B es la base donde la matriz de T es diagonal.

3. Consideramos $\mathbb{R}^4$ con el producto interno canónico. Sea

$$W = \{(w,x,y,z) \in \mathbb{R}^4 : w - x + 2y - z = 3w + 2x + 5y - 2z = 0\}.$$

- Encontrar una base ortogonal de W.
- Dar una base de $W^\perp$.

Solución. El primer paso forma parte de algo que aparece recurrentemente en la materia: tenemos un subespacio dado por ecuaciones y por alguna razón (en este caso la razón se llama Gram-Schmidt) necesitamos obtener una base.

Dado $(w,x,y,z) \in \mathbb{R}^4$, sabemos que $(w,x,y,z) \in W$ si y sólo si es solución del siguiente sistema homogeneo $\begin{cases} w - x + 2y - z & = 0, \\ 3w + 2x + 5y - 2z & = 0. \end{cases}$

Reducimos por filas este sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 5 & -2 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 9/5 & -4/5 \\ 0 & 1 & -1/5 & 1/5 \end{pmatrix}.$$

Dos sistemas homogeneos equivalentes por filas tienen las mismas soluciones, y por lo tanto

$$\begin{aligned} W &= \{(w,x,y,z) \in \mathbb{R}^4 \colon w = -9/5y + 4/5z \text{ y } x = 1/5y - 1/5z\} \\ &= \{(-9/5y + 4/5z,\ 1/5y - 1/5z,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^4 \colon y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{y(-9/5,\ 1/5,\ 1,\ 0) + z(4/5,\ -1/5,\ 0,\ 1) \in \mathbb{R}^4 \colon y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle (-9/5,\ 1/5,\ 1,\ 0),\ (4/5,\ -1/5,\ 0,\ 1) \rangle \\ &= \langle (-9,\ 1,\ 5,\ 0),\ (4,\ -1,\ 0,\ 5) \rangle. \end{aligned}$$

Estos dos vectores son LI, luego $\{(-9,\ 1,\ 5,\ 0),\ (4,\ -1,\ 0,\ 5)\}$ es una base de W.

El segundo paso es aplicar el proceso de Gram-Schmidt a estos dos vectores. Llamamos $v_1 := (-9,\ 1,\ 5,\ 0)$ y $v_2 := (4,\ -1,\ 0,\ 5)$. Obtenemos

$$w_1 = v_1 = (-9,\ 1,\ 5,\ 0),$$

$$w_2 = v_2 - \frac{(v_2|w_1)}{(w_1|w_1)} w_1 = \cdots = \left(\frac{95}{107},\, -\frac{70}{107},\, \frac{185}{107},\, 5 \right).$$

El teorema de Gram-Schmidt dice que w_1 y w_2 son ortogonales, y que $\langle w_1,\, w_2 \rangle = \langle v_1,\, v_2 \rangle = W$.

El último paso se reduce a pasar, nuevamente, de ecuaciones a generadores:

$$\begin{aligned} W^\perp &= \{v \in \mathbb{R}^4 \colon (v|w) = 0 \text{ para todo } w \in W\} \\ &= \{v \in \mathbb{R}^4 \colon (v|v_1) = 0 \text{ y } (v|v_2) = 0\} \\ &= \{(w, x, y, z) \in \mathbb{R}^4 \colon -9w + x + 5y = 0 \text{ y } 4w - x + 5z = 0\}. \end{aligned}$$

Reducimos para obtener un sistema equivalente:

$$\begin{pmatrix} -9 & 1 & 5 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & -9 \end{pmatrix},$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} W^\perp &= \{(w, x, y, z) \in \mathbb{R}^4 \colon w = y + z \text{ y } x = 4y + 9z\} \\ &= \{y(1,\, 4,\, 1,\, 0) + z(1,\, 9,\, 0,\, 1) \in \mathbb{R}^4 \colon y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle (1,\, 4,\, 1,\, 0),\, (1,\, 9,\, 0,\, 1) \rangle. \end{aligned}$$

Estos dos vectores son claramente LI.

4. Determinar si cada una de las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando en cada caso la respuesta dada.

1. Sea $\mathbb{R}[t]_2$ el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de polinomios de grado ≤ 2 con el producto interno

$$\langle ax^2 + bx + c, a'x^2 + b'x + c' \rangle = aa' + bb' + cc'.$$

Existe $p \in \mathbb{R}[t]_2$ tal que $\langle p, q \rangle = \int_{-22}^{45} q(x)dx$ para todo $q \in \mathbb{R}[t]_2$.

Solución. Esto es **verdadero**. Pongamos $V = \mathbb{R}[t]_2$. Notar que la aplicación $q \mapsto \int_{-22}^{45} q(x)dx$ determina una transformación **lineal** $\psi \colon V \to \mathbb{R}$, es decir, ψ es un elemento de V^*. Como $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto interno, el teorema de representación de Riesz garantiza la existencia del $p \in V$ buscado.

2. Si $T : \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^3$ es una transformación lineal y $\det T = 0$, entonces 0 es autovalor de T.

Solución. Esto es **verdadero**. Si el determinante de T es 0 entonces T es no singular, es decir, $\operatorname{Nu} T \neq 0$. Esto quiere decir que existe $v \in \mathbb{Q}^3$ no nulo tal que $Tv = 0$. Pero entonces $Tv = 0_{\mathbb{Q}}\, v$, y como $v \neq 0_{\mathbb{Q}^3}$ deducimos que 0 es un autovalor.

3. Sea $A \in \mathbb{C}^{3\times3}$ una matriz tal que su polinomio caracterstico es $p_A = (x-2)(x^2+2)$. Entonces A es diagonalizable.

Solución. Esto es **verdadero**. El polinomio p_A tiene tres raíces complejas **distintas**, y por lo tanto A tiene tres autovalores **distintos**. Como $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$, se sigue que A es diagonalizable.