Algebra II - 2do Cuatrimestre 2024

Segundo Parcial (12/11/2024) - Tarde

---

1. (30pts) Sea $T : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^4$ la transformación lineal dada por

$$T\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = (-2x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 3x_4, -x_1 - x_2 + x_3 - x_4, x_1 + 2x_2 - x_3, 2x_1 + x_3 + x_4).$$

   (a) Caracterizar por ecuaciones el núcleo y la imagen de T, y dar una base de cada uno.

   (b) Dadas las bases

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

   de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ y $\mathcal{B}_2 = \{(1,-1,0,0), (0,1,-1,0), (0,0,1,1), (0,0,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^4$, calcular $[T]_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}$.

---

2. (20pts) Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la siguiente transformación lineal:

$$T(x,y,z) = (3x + y, -x + 2y - z, -y + 3z), \qquad x, y, z \in \mathbb{R}.$$

   (a) Calcular los autovalores de T y sus correspondientes autoespacios.

   (b) Decidir si T es diagonalizable. En caso que lo sea, dar una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que la matriz de T en dicha base sea diagonal.

---

3. (20pts) Sean λ un número real positivo y $A, B \in \mathbb{C}^{4\times 4}$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \lambda & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -i & -1 & 0 \\ -i & -1 & -i & i \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3i & 1 & -1 \\ -1+2i & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Determinar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que $\det(A^n B^t)$ es un número real positivo.

---

4. Determinar si cada una de las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando en cada caso la respuesta dada.

   (a) (10pt) Existe un monomorfismo $T : \mathbb{Q}_2[t] \to \mathbb{Q}^{2\times 2}$ cuya imagen es $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} | a, b, c \in \mathbb{Q} \right\}$.

   (b) (10pt) Si A y B son matrices equivalentes por fila y $\det A \neq 0$, entonces $\det B \neq 0$.

   (c) (10pt) Para toda $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ no nula, la matriz adjunta $\operatorname{Adj}(A)$ es invertible.

JUSTIFICAR TODAS LAS RESPUESTAS