Prefinal 03/12/20

Importante

- Justifica todas tus respuestas.
- Para aprobar se debe obtener al menos 50 puntos.
- En cada hoja que entregues escribí, en forma clara y completa, tu nombre y apellido. Si es posible escribí con birome.
- Al finalizar, toma fotos del prefinal por el celular, y subí las fotos en formato pdf en el apartado "Tu Trabajo - Añadir o crear".
- Una vez subido el archivo, presionar "Entregar". Deben verificar que el documento esté en el sentido correcto y que su calidad permita que sea leído y corregido.

Preguntas

- Las preguntas sobre el enunciado podés hacerlas en "Comentarios privados".
- Preguntas relacionadas con el desarrollo del ejercicio podés hacerlas en "Comentarios privados".

Ejercicios

(1) (a) (15 pts) Dar una base del subespacio vectorial

$$W = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 3y + z = 0, x + 2y + 2z = 0, -x - 4y = 0\right\}.$$

(b) (10 pts) Encontrar un vector no nulo en $\mathbb{R}^3$ ortogonal a los vectores $(1, 3, 1)$, $(1, 2, 2)$ y $(-1, -4, 0)$.

(2) Sea $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3x_1 - x_2 + x_4, -3x_1 + 2x_2 + x_3, 3x_1 + x_3 + 2x_4).$$

(a) (10 pts) Encontrar una base de $\operatorname{Im} T$ y dar su dimensión.
(b) (5 pts) Dar la dimensión del núcleo usando el teorema de la dimensión.
(c) (10 pts) Extender la base de $\operatorname{Im} T$ a una base de $\mathbb{R}^3$.

(3) Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por

$$T(x, y, z) = (y - z, x - z, x + y - 2z).$$

Sea $\mathcal{B} = \{(1, 2, 0), (1, 1, -2), (1, 1, 1)\}$ base de $\mathbb{R}^3$ y $\mathcal{C}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

(a) (15 pts) Calcular la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$, es decir $[\mathrm{Id}]_{\mathcal{BC}}$ y la matriz de cambio de base de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{B}$, es decir $[\mathrm{Id}]_{\mathcal{CB}}$.

(b) (10 pts) Calcular la matriz de T en la base $\mathcal{B}$, es decir $[T]_{\mathcal{BB}}$.

(4) (a) (15 pts) Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal asociada a la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Es decir $T(v) = Av$. Probar que T es diagonalizable.

(b) (5 pts) Sean V y W dos subespacios vectoriales del espacio vectorial $\mathbb{K}_{10}[x]$ formado por todos los polinomios de grado estrictamente menor que 10. Probar que si $\dim V = \dim W = 6$ entonces $V \cap W \neq \{0\}$.

(c) (5 pts) Mostrar que existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\{(1,1,0),(0,1,0)\}$ es una base de $\mathrm{Nu}\, T$ y $\{(1,1,-1)\}$ es una base de $\mathrm{Im}\, T$.