

Prefinal 03/12/20

Importante

- Justifica todas tus respuestas.
- Para aprobar se debe obtener al menos 50 puntos.
- En **cada hoja** que entregues escribí, en forma clara y completa, tu nombre y apellido. Si es posible escribí con birome.
- Al finalizar, toma fotos del prefinal por el celular, y subí las fotos en formato pdf en el apartado "Tu Trabajo - Añadir o crear".
- Una vez subido el archivo, presionar "Entregar". Deben verificar que el documento esté en el sentido correcto y que su calidad permita que sea leído y corregido.

Preguntas

- Las preguntas sobre el enunciado podés hacerlas en "Comentarios privados".
- Preguntas relacionadas con el desarrollo del ejercicio podés hacerlas en "Comentarios privados".

Ejercicios

(1) Sea $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3x_1 - x_2 + x_3, 3x_1 + 2x_3 + x_4, -3x_1 + 2x_2 + x_4).$$

- (10 pts) Encontrar una base de $\text{Im } T$ y dar su dimensión.
- (5 pts) Dar la dimensión del núcleo usando el teorema de la dimensión.
- (10 pts) Extender la base de $\text{Im } T$ a una base de \mathbb{R}^3 .

(2) (a) (15 pts) Dar una base del subespacio vectorial

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0, x + 2y + z = 0, -x - z = 0\}.$$

- (10 pts) Encontrar un vector no nulo en \mathbb{R}^3 ortogonal a los vectores $(1, 1, 1)$, $(1, 2, 1)$ y $(-1, 0, -1)$.

(3) Sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por

$$T(x, y, z) = (x - z, y - z, x + y - 2z).$$

Sea $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1), (1, 2, 0), (1, 1, -2)\}$ base de \mathbb{R}^3 y \mathcal{C} la base canónica de \mathbb{R}^3 .

- (a) (15 pts) Calcular la matriz de cambio de base de \mathcal{B} a \mathcal{C} , es decir $[\text{Id}]_{\mathcal{BC}}$ y la matriz de cambio de base de \mathcal{C} a \mathcal{B} , es decir $[\text{Id}]_{\mathcal{CB}}$.
- (b) (10 pts) Calcular la matriz de T en la base \mathcal{B} , es decir $[T]_{\mathcal{BB}}$.

- (4) (a) (15 pts) Sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la transformación lineal asociada a la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Es decir $T(v) = Av$. Probar que T es diagonalizable.

- (b) (5 pts) Mostrar que existe $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ transformación lineal tal que $\{(1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ es una base de $\text{Nu } T$ y $\{(1, 1, 1)\}$ es una base de $\text{Im } T$.
- (c) (5 pts) Sean V y W dos subespacios vectoriales del espacio vectorial $\mathbb{K}_7[x]$ formado por todos los polinomios de grado estrictamente menor que 7. Probar que si $\dim V = \dim W = 4$ entonces $V \cap W \neq \{0\}$.