

APELLIDO Y NOMBRE: \_\_\_\_\_

EXAMEN FINAL  
**Análisis Matemático I**

1	2	3	4	5	6	Total

**Ejercicio 1: ( 1 punto)** Calcule los siguientes límites:

a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 + x - 2}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(2x))}{\ln(\cos(3x))}$

**Ejercicio 2: ( 1 punto)** Calcule la ecuación de la recta tangente a la curva  $y = \sin(x^2)$  en cada uno de los siguientes puntos:

a)  $(0, 0)$

b)  $(\sqrt{\frac{\pi}{2}}, 1)$ .

**Ejercicio 3: ( 1 punto)** Calcule las siguientes integrales:

a)  $\int \frac{\tan^3(x)}{\cos^2(x)} dx$

b)  $\int_{-1}^1 x e^{-x} dx$

**Ejercicio 4: ( 1.5 puntos)** Para cada una de las siguientes afirmaciones, indique si la misma es verdadera o falsa. Fundamente su respuesta con una demostración o un resultado teórico, o con un ejemplo o contraejemplo, según corresponda.

a) La ecuación  $x^5 = 5x - 2$  tiene al menos una raíz en el intervalo  $(0, 1)$ .

b) Si existe el límite  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ , entonces  $f$  es continua en  $a$ .

c) Si  $f$  y  $g$  son derivables en  $x = a$ , entonces  $(f \circ g)$  es derivable en  $a$ .

**Ejercicio 5: ( 4 puntos)** Considere la función

$$f(x) = \frac{x^2}{1 - x^2}.$$

- a) Determine el dominio de  $f$ .
- b) Indique si existen puntos de discontinuidad en el dominio de  $f$ .
- c) Diga si existen o no asíntotas verticales, y en caso de existir indique cuáles son.
- d) Calcule  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  y  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ , e indique si  $f$  tiene asíntotas horizontales y cuáles son.
- e) Determine si el gráfico de la función interseca los ejes coordenados, y en caso afirmativo dé los puntos de intersección.
- f) Indique si existen o no puntos críticos en el dominio de  $f$ .
- g) Determine si  $f$  tiene máximos y mínimos, locales y absolutos.
- h) Calcule los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de  $f$ .
- i) Determine los intervalos de concavidad hacia arriba y hacia abajo de  $f$ .
- j) Indique si el gráfico de  $f$  tiene puntos de inflexión, y en tal caso diga cuáles son.
- k) Determine la imagen de  $f$ .
- l) En base a los items anteriores, esboce un gráfico aproximado de  $f$ .

**Ejercicio 6: ( 1.5 puntos)** Enuncie y demuestre el Teorema del Valor Medio.