Examen Final - 21 de agosto de 2020

Ejercicio 1. a) Diga cuáles son los números que se encuentran a menor distancia de -1 que de 3.

(i) Escriba una inecuación que represente el problema.

(ii) Resuelva la inecuación del punto anterior.

b) Grafique el conjunto de soluciones de la desigualdad $\ln(x-2)+\ln(x+1)-\ln(x-4)<0$

c) Dada la función $f(x)=e^{-x^2}+1$, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, responda las siguientes preguntas, justificando las respuestas:

(i) ¿Es inyectiva?

(ii) ¿Es subyectiva?

(iii) ¿Es biyectiva?

(iv) ¿Es inversible?

(v) ¿Es necesario restringir el dominio para que sea inyectiva? En caso afirmativo, ¿cuál es?

(vi) ¿Es necesario restringir el conjunto de llegada para que sea subyectiva? En caso afirmativo, ¿cuál es?

(vii) Indique el dominio y espacio de llegada para que la función tenga inversa y calcúlela.

Ejercicio 2. a) Calcule los siguientes límites SIN usar la regla de L'Hôpital:

(i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(x)}{\operatorname{sen}(2x)}$

(ii) $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$ sabiendo que: $-\dfrac{1}{6}\leq f(x)\leq\dfrac{x-3}{9-x^2}$ para todo $x>3$

b) (i) Se sabe que el número de individuos en función del tiempo de una cierta especie de animales es igual a: $N(t)=\dfrac{100t+5}{t+5}$. ¿Cúal es el número de individuos cuando el tiempo crece indefinidamente?

(ii) Demuestre que hay una solución de la siguiente ecuación en el intervalo dado: $2^x=2-x$ en $(0,1)$

c) Usando las herramientas que considere más apropiadas, calcule el siguiente límite: $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{3x}$

Ejercicio 3. a) Calcule las derivadas de las siguientes funciones:

(i) $f(x)=\cos^4(3x^2+\pi)$

(ii) $g(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{x^3}$

b) (i) Obtenga la ecuación de la recta tangente al gráfico de la función $f(x)=\ln(x+2)$ en el punto $(-1,0)$.

(ii) Utilice la ecuación obtenida en (i) para estimar el valor de $f(-0,9)$ con una aproximación lineal.

c) Enuncie el Teorema del Valor Medio e interprete gráficamente este resultado (puede ser mediante un ejemplo).

Ejercicio 4. Grafique una función que cumpla con **todas** las siguientes características:

(i) El dominio es $Dom\, f = \mathbb{R} - \{0\}$; la imagen es $\mathbb{I} = [-2, +\infty)$

(ii) Tiene una asíntota horizontal en $y = 1$

(iii) $\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty$

(iv) Tiene una discontinuidad esencial en $x = 0$

(v) Tiene una discontinuidad de salto en $x = 4$

(vi) $f'(x) > 0$ en $(-\infty, 0)$

(vii) Tiene un mínimo absoluto en $x = 2$

(viii) Tiene puntos de inflexión en $x = -4$ y en $x = -2$

(ix) Es cóncava hacia arriba en $(-\infty, -4)$

(x) $f''(x)$ es positiva en $(0, 4) \cup (4, +\infty)$

Ejercicio 5.

a) Resuelva la siguiente integral. *Ayuda*: Puede resultar más fácil hacer primero una sustitución y después resolver por partes.

$$\int x^3 \cos(x^2) dx$$

b) Grafique el triángulo cuyos vértices son (0,0); (1,2) y (3,1). Calcule su área usando integrales definidas.

c) Sin realizar el cálculo de la integral, justifique la validez de la siguiente desigualdad:

$$\frac{\sqrt{2}\pi}{24} \leq \int_{\pi/6}^{\pi/4} \cos x dx \leq \frac{\sqrt{3}\pi}{24}$$