05/12/2008

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	libre	Total	Nota

15 10 5 10 10 10

Apellido y Nombre:

Comisión:

Análisis Matemático II - Licenciatura en Ciencias de la Computación

Examen Final

Parte Práctica

(1) (a) Calcular las siguientes integrales indefinidas:

$$a) \int \frac{1}{x^3+x}\,dx \quad 5 \qquad b) \int x(\cos(x))^2\,dx. \quad 5$$

(b) Decidir si la siguiente integral impropia es convergente: $\int_1^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^{3/2}}dx$. Justificar. 5

(2) Decidir si las siguientes series convergen, convergen absolutamente o divergen:

$$a) \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n^2-1}, \qquad b) \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n^2}.$$

5 10

Justificar en cada caso.

(3) Utilice polinomios de Taylor para calcular

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)+\frac{x^2}{2}-1}{x\ln(x+1)-x^2+x^3/2}.$$

5 $\frac{1}{4}$

(4) Consideremos la función $f : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \frac{x^3y - y^3x}{x^2+y^2}.$$

(a) Probar que existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$. ¿Cuánto tiene que valer $f(0,0)$ para que f sea continua en todo $\mathbb{R}^2$? 4

(b) Calcular las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$. Obtener el plano tangente a la gráfica en $(0,0,f(0,0))$. 3

(c) Probar que es diferenciable en $(0,0)$. 3

(5) Sea $f(x,y) = \frac{x^3}{3} + \frac{y^3}{3} - cxy + 4$.

(a) Encontrar los puntos críticos de f (dejarlos expresados en función de c.) 5

(b) ¿Qué signo debe tener la constante c para que f tenga un máximo relativo, o un mínimo relativo o un punto de silla? 5

(6) Calcular $\int\int_R (2x+y)dxdy$, donde R la región que se encuentra entre las gráficas de $y = x^2$ e $y = x^4$. Grafique la región.

10

$\int e^{x^2}$ e^{x^4}

Parte Teórica.

(7) Probar que si $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ es tal que $f'(x)=0$ para todo $x\in(a,b)$ entonces $f(x)=c$ para todo $x\in(a,b)$. Probar que si $F(x)$ y $G(x)$ son antiderivadas de la misma función f entonces existe una contante c tal que $F(x)=G(x)+c$

(8) Dada una sucesión de números reales $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

(a) Definir que significa $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(b) Dar la definición de serie convergente y absolutamente convergente.

(c) Enunciar el criterio de comparación para una serie numérica de términos positivos.

(9) Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$.

(a) Dar la definición de derivada parcial de f en el punto (a,b).

(b) ¿Hay alguna condición que asegure cuando f es diferenciable en el punto (a,b)?.

(10) Considerar la superficie S definida en forma implícita por

$$S=\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2=1\}.$$

Encontrar los puntos de S donde el plano tangente(a S) sea paralelo al plano de ecuación $x+y+z=5$.

Ejercicio para Libres:

(11) Calcular $\sum_{n=0}^{\infty}\cos(\pi n)\frac{3^n}{7^{n+2}}$.