1. Calcular

a) $\int \cos(2x)e^{\sin(2x)}dx$

Solución.

Uso sustitución: $u = \sin(2x)$, luego $du = 2\cos(2x)dx$. Sustituyendo obtenemos:

$$\frac{1}{2}\int e^u du = \frac{1}{2}e^u + \text{cte} = \frac{1}{2}e^{\sin(2x)} + \text{cte}$$

b) $\int \frac{2x}{(x-1)(x^2+2x+1)}dx$

Primero me fijo si el polinomio de grado 2 que está en el denominador tiene raíces reales usando Bhaskara:

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

y veo que la raíz repetida es -1. Por lo tanto, $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$.

Luego, usando el CASO I y II de fracciones simples, expreso:

$$\frac{2x}{(x-1)(x^2+2x+1)} = \frac{2x}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}.$$

Ahora debemos encontrar los valores de A, B y C. Para ello:

$$\frac{2x}{(x-1)(x^2+2x+1)} = \frac{2x}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} =$$
$$\frac{(x+1)^2A + B(x-1)(x+1) + C(x-1)}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{(x^2+2x+1)A + B(x^2-1) + C(x-1)}{(x-1)(x+1)^2} =$$
$$\frac{x^2(A+B) + x(2A+C) + A - B - C}{(x-1)(x+1)^2}.$$

Entonces tenemos que:

$$\frac{2x}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{x^2(A+B) + x(2A+C) + A - B - C}{(x-1)(x+1)^2}.$$

Igualamos ahora los factores que multiplican a x^0, x^1 y x^2 en los 2 numeradores:

(i) Igualando los factores que acompañan a x^2 del lado derecho e izquierdo de la igualdad tenemos: $A + B = 0$,

(ii) Igualando los factores que acompañan a x^1 del lado derecho e izquierdo de la igualdad tenemos: $2A + C = 2$,

(iii) Igualando los factores que acompañan a x^0 del lado derecho e izquierdo de la igualdad tenemos: $A - B - C = 0$.

Haciendo álgebra vemos que $A = 1/2$, $B = -1/2$ y $C = 1$, entonces:

$$\int \frac{2x}{(x-1)(x^2+2x+1)}dx = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{dx}{(x+1)^2} =$$
$$\frac{1}{2}\ln(\mid x-1 \mid) - \frac{1}{2}\ln(\mid x+1 \mid) - \frac{1}{x+1} + \text{cte}$$

2. Calcular la derivada de la siguiente función.
$F(x) = \int_0^{x^2} \frac{e^{t^2}+1}{\sqrt{1-t^2}}dt$

Solución.

Recordemos que la derivada de una función de la forma

$$G(x) := \int_0^x f(t)\,dt \quad \text{es} \quad G'(x) = f(x).$$

Por otra parte, la derivada de una composición de la forma

$$g(x) := h(j(x)) \quad \text{es} \quad g'(x) = h'(j(x))\,j'(x).$$

Por lo tanto, si tenemos que derivar algo de la forma

$$F(x) := \int_0^{j(x)} f(t)\,dt,$$

como esto es la composición de las funciones $G(x)$ y $j(x)$, o sea, $F(x) = G(j(x))$, la derivada nos queda

$$F'(x) = G'(j(x))\,j'(x) = f(j(x))\,j'(x). \tag{0.1}$$

En nuestro caso, tenemos que $j(x) = x^2$ y $f(t) = \frac{e^{t^2}+1}{\sqrt{1-t^2}}$. Entonces $j'(x) = 2x$, y usando (0.1) resulta que

$$F'(x) = f(j(x))\,j'(x) = \frac{e^{\left(x^2\right)^2}+1}{\sqrt{1-\left(x^2\right)^2}}2x,$$

y listo.

3. Determine si la siguiente integral converge y en tal caso calcularla.
$\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2} dx$

Solución.
Calculamos primero la integral indefinida $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$. Para calcular esta integral, usamos la fórmula de integración por partes

$$\int f(x)\, g'(x)\, dx = f(x)\, g(x) - \int f'(x)\, g(x)\, dx.$$

En nuestro caso, elegimos $f(x) = \ln x$ y $g'(x) = \frac{1}{x^2}$. Entonces $f'(x) = \frac{1}{x}$ y $g(x) = -\frac{1}{x}$, y

$$\int \frac{\ln x}{x^2} dx = \ln x . \left(-\frac{1}{x}\right) - \int \frac{1}{x} . \left(-\frac{1}{x}\right) dx = -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{1}{x^2} dx =$$
$$-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} = -\frac{1}{x}(\ln x + 1)$$

Ahora, usamos la definición de integral impropia, y calculamos

$$\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2} dx = \lim_{M\to\infty} \int_1^M \frac{\ln x}{x^2} dx = \lim_{M\to\infty} -\frac{1}{x}(\ln x + 1)\ \Big|_1^M =$$
$$\lim_{M\to\infty} -\frac{1}{M}(\ln M + 1) + 1 = 1$$

En la última igualdad, hemos usado que $\lim_{M\to\infty} \frac{\ln M}{M} = 0$ (esto sale fácil usando L'Hopital) y que $\lim_{M\to\infty} \frac{1}{M} = 0$.

4. Determine si la siguiente sucesión converge o no y calcule el límite si es posible.
$a_n = \exp\left(\frac{n}{n^2+1}\right)$

Solución.
Notamos primero que la sucesión $\left\{\frac{n}{n^2+1}\right\}_{n=1}^\infty$ es convergente y su límite es 0 (esto es fácil de comprobar, por ejemplo, usando L'Hopital con el límite $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2+1}$). Entonces, usando un teorema del teórico, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} e^{\frac{n}{n^2+1}} = e^{\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1}} = e^0 = 1.$$

5. Determine si las siguientes series convergen o no.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\left((n+\frac{1}{2})\pi\right)}{2^{n-1}}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4+3n^2+2}{n^6+15n+7}$

Solución.

a) Notar que los términos del numerador de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen((n+\frac{1}{2})\pi)}{2^{n-1}}$ son 1 o -1 según n sea par o impar respectivamente. Es decir, estamos en presencia de una serie alternante. Para ver la convergencia podemos ver si la serie converge absolutamente, es decir si la serie $\sum |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ converge. Esta serie se puede escribir como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{m},$$

o sea, es una serie geométrica $\sum_{m=0}^{\infty} r^m$ con $r = 1/2 < 1$. Por lo que esa serie converge y la suma será $\frac{1}{1-1/2} = 2$. Luego, hemos probado que la serie original converge absolutamente, y por lo tanto (por teorema del teórico) la serie converge (y la suma será ≤ 2).

b) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4+3n^2+2}{n^6+15n+7}$ se puede escribir como suma de tres series:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{n^6+15n+7} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2}{n^6+15n+7} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^6+15n+7} \tag{0.2}$$

Si cada serie converge, también lo hace la suma de las series.

Veamos la primera serie y usemos el siguiente criterio de comparación: Sean $\sum a_n$ y $\sum b_n$ series con términos positivos. Si la serie $\sum b_n$ es convergente y $a_n \leq b_n$ para todo n, entonces la serie $\sum a_n$ es convergente:

Notamos ahora que para todo n,

$$\frac{n^4}{n^6+15n+7} < \frac{n^4}{n^6} = \frac{1}{n^2}.$$

El término de la derecha corresponde a una serie del tipo $\sum \frac{1}{n^p}$ con $p = 2 > 1$, y por lo tanto esa serie converge. Luego, por el criterio de comparación, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{n^6+15n+7}$$

converge.

Como en las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2}{n^6 + 15n + 7} \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^6 + 15n + 7}$$

se puede aplicar el mismo razonamiento, vemos que las tres series de (0.2) convergen, y por lo tanto converge la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4 + 3n^2 + 2}{n^6 + 15n + 7},$$

que es lo que queríamos ver.

6) a) Dar el radio de convergencia

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5x)^n}{n^3}$$

Veamos el radio de convergecia por el criterio del cociente.

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{5^{n+1}|x|^{n+1}}{(n+1)^3}\right|}{\left|\frac{5^n|x|^n}{n^3}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{5^{n+1}|x|^{n+1}\, n^3}{\cancel{5^n}\,\cancel{|x|^n}\,(n+1)^3}$$

$$= 5|x| \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^3 = 5|x| \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\cancel{n}}{\cancel{n}}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^3 = 5|x|$$

Y converge cuando $5|x| < 1 \Rightarrow |x| \overset{?}{\leq} \frac{1}{5} \to -\frac{1}{5} \overset{?}{\leq} x \overset{?}{\leq} \frac{1}{5}$

Veamos qué pasa en los extremos.

Cuando $x = -\frac{1}{5}$, la serie queda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}$

Si usamos el criterio del cociente;

$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^3 = 1$ y no es concluyente

Si llamamos $a_n = \frac{(-1)^n}{n^3}$, y $b_n = \frac{1}{n^3}$

① $\Rightarrow 0 \leq a_n \leq b_n$, $b_n = \frac{1}{n^3}$ converge porque

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ converge si $s>1$ y acá $\underline{s=3}$

Con esto demostramos que cuando $x = \frac{1}{5}$, $\underline{\sum_{n=1} \frac{1}{n^3} \text{ converge}}$

Volviendo a ① Como b_n converge $\Rightarrow a_n$ converge

Así, el intervalo de convergencia es

$$-\frac{1}{5} \leq x \leq \frac{1}{5} \quad \text{y} \quad \boxed{R = \frac{1}{5}}$$

b) Veamos si $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(-\frac{5}{2}\right)^n}{n^3}$ converge

Evaluemos por el criterio del cociente

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{\left(-\frac{5}{2}\right)^{n+1}}{(n+1)^3}\right|}{\left|\frac{\left(-\frac{5}{2}\right)^n}{n^3}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{5}{2}\frac{n^3}{(n+1)^3} = \frac{5}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\cancel{n}}{\cancel{n}}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^3 = \frac{5}{2}$$

Como $\frac{5}{2} > 1 \Rightarrow$ por el criterio, diverge

7 Desarrollo de Taylor y convergencia de $f(x) = \text{sen}(\pi \cdot x)$

$f(0)=0$; $f'(x) = \pi\cos(\pi x)$ con $f'(0) = \pi$

; $f''(x) = -\pi^2 \text{sen}(\pi x)$ con $f''(0)=0$

; $f'''(x) = -\pi^3\cos(\pi x)$ con $f'''(0) = -\pi^3$

$\vdots$

$$\Rightarrow f(x) \approx \pi x - \pi^3\frac{x^3}{3!} + \pi^5\frac{x^5}{5!} - \pi^7\frac{x^7}{7!}$$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \pi^{2n+1}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Veamos la convergencia, criterio del cociente

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\left|(-1)^{n+1}\pi^{2n+2}\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\right|}{\left|(-1)^n\pi^{2n+1}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right|} =$$

$$= \pi\lim_{n\to\infty}|x|\frac{(2n+1)!}{(2n+2)!} = \pi|x|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+2} = 0 \Rightarrow R = \infty$$

Converge $\forall x$