Segundo Parcial - Análisis Numérico / Análisis Numérico 1 - 2021

Junio 2021

Fecha de inicio: 07/06/2021
Fecha de entrega: 11/06/2021 23:59.

Forma de entrega

- Archivos `.py` enviados en la tarea creada en el aula virtual. Agregar **todos** los archivos necesarios para correr las soluciones desde la carpeta de la entrega.
- En caso de no agregar un `main` que corra las funciones de cada archivo, dejar instrucciones de ejecución de cada uno en los comentarios o en un único archivo de texto para todos los `.py`.
- Asegúrese que los programas implementados corran.

1. Una manera de obtener el polinomio interpolante es resolviendo un sistema de ecuaciones lineales cuyos coeficientes son los de la matriz de Vandermonde, es decir, resolver el sistema lineal

$$\sum_{i=0}^{n-1} u_i x_j^i = y_j, \qquad j = 1, \ldots, n$$

   Implemente una función que se llame `ivander` que tenga como argumentos `(x,y,z)` donde $x, y \in R^n$ son las listas de coordenadas de los puntos a interpolar ($p(x_i) = y_i$) y $z \in R^m$ son los puntos en los que evaluar el polinomio. La función debe construir la matriz de Vandermonde, resolver el sistema de ecuaciones asociado, y devolver la lista de evaluaciones en cada elemento de z del polinomio interpolante.

   Compare la performance de esta función con las funciones interpolantes del laboratorio 3 de la siguiente manera:

   - Genere una lista equiespaciada de 55 puntos en el intervalo $[0, 2\pi]$. Este será el vector x. Evalúe la función seno en cada punto del intervalo para construir el vector y. Para el vector z genere una lista de 100 puntos equiespaciados en el mismo intervalo que x.
   - Calcule la evaluación en el vector z utilizando `ivander` e `ilagrange`.
   - Grafique ambas interpolaciones.

2. Los sistemas idealizados masa-resorte desempeñan un papel importante en la mecánica y en otros problemas de ingeniería. En la figura se presenta un sistema de este tipo. Después de liberar las masas, éstas son jaladas hacia abajo por la fuerza de gravedad. Observe que el desplazamiento resultante en cada resorte de la figura b) se mide a lo largo de las coordenadas locales referidas a su posición inicial en la figura a).

   Se apela a la segunda Ley de Newton y un sistema de equilibrio de fuerzas para desarrollar un modelo matemático del sistema para describir el desplazamiento de las masas con respecto al tiempo. Las

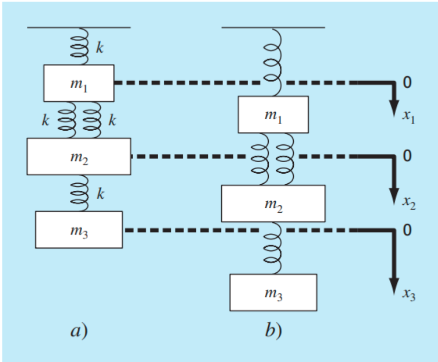

Figura 1: Un sistema compuesto de tres masas suspendidas verticalmente por una serie de resortes.

siguientes ecuaciones forman un sistema de tres ecuaciones diferenciales con 3 incógnitas:

$$\begin{aligned} m_1\frac{d^2x_1}{dt^2} &= 2k(x_2-x_1)+m_1g-kx_1, \\ m_2\frac{d^2x_2}{dt^2} &= k(x_3-x_2)+m_2g-2k(x_2-x_1), \\ m_3\frac{d^2x_3}{dt^2} &= m_3g-k(x_3-x_2), \end{aligned}$$

Estas ecuaciones sirven para calcular los desplazamientos de las masas como función del tiempo. Si igualamos a cero las derivadas con respecto al tiempo, es decir $\frac{d^2x_i}{dt^2}=0$ para $i=1,2,3$, y resolvemos el sistema, obtenemos el desplazamiento cuando el sistema llega al reposo.

- Plantee el sistema $Kx=w$ con $w=[gm_1,gm_2,gm_3]^T$, correspondiente para encontrar los desplazamientos x_1,x_2 y x_3 en estado de reposo del sistema. Si $g=9.8$ m/s2, $m_1=2$ kg, $m_2=3$ kg, $m_3=2.5$ kg , y todas las $k=10$ kg/s2, use descomposición LU para este propósito.
- A partir de la descomposición LU calculada en el item anterior, encuentre la inversa de la matriz K planteando 3 sistemas de ecuaciones. Cada elemento ij de esta matriz nos indica el desplazamiento de la masa i debido a una fuerza unitaria impuesta sobre la masa j, de allí su importancia.