

Examen Parcial Introducción a los Algoritmos - 13 de Noviembre de 2014

Cantidad de hojas entregadas:

Poner Apellido y Nombre y Numerar cada hoja.

1. Demostrar que las siguientes fórmulas son teoremas del Cálculo Proposicional. En cada paso de la demostración indique que axioma o teorema se utiliza, y subraye la subfórmula involucrada. Se pueden utilizar, sin demostrar, los axiomas y teoremas dados en el Digesto Proposicional.

a) [15 pto(s)] $(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \wedge q \equiv (p \Rightarrow r) \wedge q$

b) [15 pto(s)] $(p \Rightarrow q \wedge r) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)$

2. [20 pto(s)] Formalizar las siguientes propiedades escritas en lenguaje natural, en el lenguaje de la lógica de predicados:

- “Si el elemento x ocurre en la lista xs entonces el elemento y también ocurre en xs en una posición posterior.”

Ejemplos: La lista $xs = [1, 3, 4, 5]$ con $x = 3$ y $y = 5$ satisfacen la propiedad. La lista $xs = [1, 3, 4, 5]$ con $x = 5$ y $y = 3$ no la satisface.

- “La lista xs contiene ceros en las posiciones impares”

Ejemplos: Las listas $[1, 0, 8]$ y $[4, 0, 0, 0]$ satisfacen la propiedad. Las listas $[1, 2, 3]$, $[13, 187, 55, 21]$ no la satisfacen.

3. Construcción de modelos

- a) [10 pto(s)] Construir un modelo en el que se satisfagan todas siguientes sentencias:

- $\langle \exists x :: \text{rojo}.x \vee \text{chico}.x \rangle$
- $\langle \forall x : \neg \text{rojo}.x : \text{grande}.x \Rightarrow \text{triángulo}.x \rangle$
- $\langle \forall x : \text{grande}.x : \text{rojo} \vee \text{círculo}.x \rangle$

- b) [10 pto(s)] Construir un modelo que además satisfaga la siguiente propiedad (es decir, las cuatro fórmulas mencionadas en este ejercicio deben ser verdaderas en el modelo final).

- $\langle \exists x :: \langle \exists y : \neg(x = y) : \text{chico}.x \wedge \text{azul}.y \rangle \rangle$

Para evitar confusiones, dar en cada caso, un dibujo del modelo, nombrando todos los elementos, y luego indicar, para cada elemento qué propiedades (forma, color, tamaño) tiene cada uno.

4. Demostrar que las siguientes fórmulas son teoremas del Cálculo de Predicados. En cada paso de la demostración indique que axioma o teorema se utiliza, y subraye la subfórmula involucrada. Se pueden utilizar, sin demostrar, los axiomas y teoremas dados en el Digesto Proposicional.

- a) [15 pto(s)] En esta demostración se pueden utilizar sólo los **axiomas** del Cálculo de Predicados y los **axiomas** y **teoremas** del Cálculo Proposicional.

$$\langle \exists x : r.x : f.x \rangle \equiv \langle \exists x :: r.x \wedge f.x \rangle$$

- b) [15 pto(s)] En esta demostración se pueden utilizar, sin demostrar, todos los **axiomas** y **teoremas** dados en el Digesto para el Cálculo de Predicados y los **axiomas** y **teoremas** del Cálculo Proposicional.

$$\langle \forall x : r.x : t.x \rangle \wedge \langle \forall x : s.x : t.x \rangle \equiv \langle \forall x : r.x \vee s.x : t.x \rangle \wedge \langle \forall x : r.x \wedge s.x : t.x \rangle$$