

1. (Recursión primitiva) Sea $\Sigma = \{!, ?\}$.
 - a) Pruebe que la función $i_? : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$, dada por $i_?(a) := ?a$, es Σ -p.r. (Puede usar que la función $\lambda\alpha\beta [\alpha\beta]$ es Σ -p.r.)
 - b) Dada una palabra $\alpha = a_1 \dots a_n \in \Sigma^*$ con $n \geq 1$ definimos la *transpuesta* de α como la palabra $\alpha^T := a_n \dots a_1$. Por ejemplo, $??!!!?^T = ?!!!??$. Definimos además $\varepsilon^T := \varepsilon$. Encuentre funciones Σ -p.r. f , $\mathcal{G}_!$ y $\mathcal{G}_?$ tales que $R(f, \mathcal{G}) = \lambda\alpha[\alpha^T]$.
2. (División por casos) Sea $\Sigma = \{!, ?\}$ y sea $f : \omega \times \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ dada por

$$f(x, \alpha) := \begin{cases} ?^x & \text{si } |\alpha| \text{ es par} \\ \alpha^x & \text{si } |\alpha| \text{ es impar.} \end{cases}$$

Pruebe que f es Σ -p.r. (Puede usar que las funciones: $\lambda\alpha [|\alpha|]$, $\lambda x\alpha [\alpha^x]$ y $\lambda x [x \text{ es par}]$ son Σ -p.r.)

3. (Cuantificación acotada) Sea $\Sigma = \{!, ?\}$. Pruebe que

$$\{(x + 1, !^x, ?) : x \in \omega \text{ y } x \text{ es par}\}$$

es Σ -p.r. (Puede usar que las funciones: $\lambda\alpha\beta [\alpha = \beta]$, $\lambda xy [x = y]$, $\lambda x\alpha [\alpha^x]$ y $\lambda x [x \text{ es par}]$ son Σ -p.r.)