(1) Sea $\Sigma = \{@, !\}$ y sea $\mathcal{P}_0 \in \text{Pro}^\Sigma$. Sea

$$L = \{\alpha \in \Sigma^* : (\exists \beta \in \Sigma^*)\ \Psi_{\mathcal{P}_0}^{0,1,\#}(\alpha\beta) \leq \Psi_{\mathcal{P}_0}^{0,2,\#}(\alpha, \alpha)\}$$

(a) Justifique que $\varepsilon \in L$.

(b) De un programa $\mathcal{P}$ tal que $\text{Dom}(\Psi_{\mathcal{P}}^{1,0,*}) = \omega$ y $\text{Im}(\Psi_{\mathcal{P}}^{1,0,*}) = L$.

(2) Sea $\Sigma = \{@, !\}$. Supongamos $S_1, S_2 \subseteq \omega \times \omega \times \Sigma^*$ son conjuntos Σ-enumerables tales que $(0, 0, \varepsilon) \in S_1 \cap S_2$.

(a) De un programa $\mathcal{P} \in \text{Pro}^\Sigma$ (usando macros) tal que:

i. Para cada $x \in \omega$, tenemos que $\mathcal{P}$ se detiene partiendo desde el estado $\|x\|$ y llega a un estado de la forma $((x_1, x_2, y_1, ...), (\alpha_1, \beta_1, ...))$, donde $(x_1, x_2, \alpha_1) \in S_1 \cap S_2$.

ii. Para cada $(x_1, x_2, \alpha_1) \in S_1 \cap S_2$ hay un $x \in \omega$ tal que $\mathcal{P}$ se detiene partiendo desde el estado $\|x\|$ y llega a un estado de la forma $((x_1, x_2, y_1, ...), (\alpha_1, \beta_1, ...))$.

(b) Use la existencia de $\mathcal{P}$ para probar que $S_1 \cap S_2$ es Σ-enumerable.

NOTA: para cada macro usado dar en forma matematica precisa la funcion o predicado asociado, dependiendo si el macro es de asignacion o de tipo IF. Para describir la funcion o predicado use la notacion clasica para funciones (i.e. la enseñada en la Guia 1), NO mescle notacion propia del lenguaje $\mathcal{S}^\Sigma$ cuando quiere describir matematicamente una funcion. Luego justificar la existencia del macro explicando por que dicha funcion es Σ-computable. Finalmente (y solo despues de haber hecho lo anterior) si le parece mas agradable denote el macro en una forma mas simpatica.