# Final de Lógica 2005

1. V o F, justifique.

   (a) Dado un tipo $\tau$, $\varphi, \psi$ fórmulas, $\mathbf{A}$ estructura de tipo $\tau$ y $\vec{a} \in A^{\mathbf{N}}$, se tiene que
   $V^{\mathbf{A}}(((\forall x_1 \varphi \to \psi) \to \exists x_1(\varphi \to \psi)), \vec{a}) = 1$

   (b) Si hay un $\mathbf{A}$ tal que $\mathbf{A} \models \varphi$ y $\mathbf{A} \models \neg\psi$ entonces en el algebra de Lindenbaum $\mathcal{A}_{(\Sigma,\tau)}$ se tiene que $[\varphi] \nleq [\psi]$.

   (c) La siguiente es una prueba de
   $(\emptyset, (\emptyset, \{f^1\}, \emptyset, a)) \vdash (\forall x \exists y\ (f(y) \equiv x) \to \forall x \exists y (f(f(y)) \equiv x)$

   | | |
   |---|---|
   | 1. $\forall x \exists y\ (f(y) \equiv x)$ | *HIP* |
   | 2. $\exists y\ (f(y) \equiv c)$ | *PART* 1 |
   | 3. $(f(e) \equiv c)$ | *ELEC* 2 |
   | 4. $\exists y\ (f(y) \equiv e)$ | *PART* 1 |
   | 5. $(f(d) \equiv e)$ | *ELEC* 4 |
   | 6. $(f(f(d)) \equiv c)$ | *REEM* 3 5 |
   | 7. $\forall x(f(f(d)) \equiv x)$ | *GEN* 6 |
   | 8. $(f(f(d)) \equiv x_0)$ | *PART* 7 |
   | 9. $\exists y(f(f(y)) \equiv x_0)$ | *EXIST* 8 |
   | 10. $\forall x \exists y(f(f(y)) \equiv x)$ | *GEN* 9 |
   | 11. $(\forall x \exists y\ (f(y) \equiv x) \to \forall x \exists y(f(f(y)) \equiv x)$ | *CONC* |

   $(c, d, e, x_0$ son nombres de ctes)

   (d) Sea $\Sigma$ un conjunto de identidades de tipo $\tau$. Entonces $\Sigma \models p \approx q$ implica hay $\Sigma_0 \subsetneq \Sigma$, finito, tal que $\Sigma_0 \models p \approx q$.

2. Sea $\mathbf{C}_n = (\{0, ...., n\}, max, min)$ con $n \geq 1$.

   (a) Pruebe que para cada $\theta$ congruencia de $\mathbf{C}_n$ hay un homomorfismo $F : \mathbf{C}_n \to \mathbf{C}_n$ tal que $ker(F) = \theta$.

   (b) Muestre que

   $$|\{F : F : \mathbf{C}_n \to \mathbf{C}_n \text{ es un homorfismo}\}| > |\{\theta : \theta \text{ es una congruencia de } \mathbf{C}_n\}|.$$

3. Dar una prueba que atestigüe que

   $Arit \vdash \forall x \forall y \forall z\ ((x \not\equiv 0 \land y \not\equiv 0 \land x.y \leq z) \to (x \leq z \land y \leq z))$