Final de Lógica 2005

1. V o F, justifique. (Haga 2 de los 3siguientes items)

   (a) Supongamos (L, s, i) es un reticulado tal que para cada $x, y \in L$, $x \leq y$ o $y \leq x$. Entonces L tiene dos elementos si tiene exactamente dos congruencias.

   (b) En el algebra de Lindenbaum $\mathcal{A}_{(\emptyset,(\emptyset,\emptyset,\emptyset,\emptyset))}$ se tiene que $[\varphi] \leq [\psi]$ se da cuando $\{\mathbf{A} : \mathbf{A} \models \varphi\} \subseteq \{\mathbf{A} : \mathbf{A} \models \psi\}$.

   (c) Supongamos (Σ, τ) es consistente y $(\Sigma, \tau) \vdash \exists x\varphi(x)$, con $\varphi = \varphi(x)$. Entonces si $c \notin \mathcal{C}$, se tiene que $(\Sigma \cup \{\varphi(c)\}, (\mathcal{C} \cup \{c\}, \mathcal{F}, \mathcal{R}, a))$ es consistente.

2. Sea $\tau = (\{c, d\}, \{f^1\}, \emptyset, a)$. Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son modelos de tipo τ tales què:

   $c^{\mathbf{A}} = 0$ y $d^{\mathbf{A}} = 1$

   $A = B = \{0, 1, 2\}$

   Para cada sentencia φ con a lo sumo un cuantificador se tiene $\mathbf{A} \models \varphi$ sii $\mathbf{B} \models \varphi$.

   Pruebe que $\mathbf{A} \cong \mathbf{B}$.

3. Para la siguiente formula de tipo $\tau = (\{1\}, \{f^2\}, \{r^2, h^3\}, a)$ encuentre una equivalente en forma normal prenexa

   $(\exists z(f(z, u) \equiv 1) \rightarrow (\forall x\ h(x, u, y) \wedge \exists y\ r(x, x)))$

4. Dar pruebas que atestigüen que

   (a) $Arit \vdash \forall x\ (1 \leq x \rightarrow (x+1) \not\equiv (x+1).(x+1))$.

   (b) $Arit \vdash \forall x\ (x \equiv x.x \rightarrow (x \equiv 0 \vee x \equiv 1))$.