Final de Lógica 2006

1. Sea $\varphi \in F^\tau$ tal que las únicas variables que ocurren normalmente en φ estan en $\{x_1, x_2\}$. Sea φ' = resultado de reemplazar cada ocurrencia normal de x_1 en φ por x_3 y cada ocurrencia normal de x_2 en φ por x_4. Pruebe que
   $V^{\mathbf{A}}(\varphi, (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, ...)) = V^{\mathbf{A}}(\varphi', (a_1, a_2, a_1, a_2, a_5, a_6, ...))$
   cualesquiera sean la estructura de tipo τ, A y $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, ...) \in A^{\mathbf{N}}$.

2. V o F, justifique
   a. Sea $A = \{a, b\}$, con $a \neq b$. Hay exactamente dos estructuras de tipo $\{\mathsf{s}^2, \mathsf{i}^2\}$ con universo igual a A.
   b. Sea $\tau = (\emptyset, \emptyset, \{r^2\}, a)$. En el algebra de Lindenbaum $\mathcal{A}_{(\emptyset,\tau)}$ se tiene que $[\exists x \forall y\, r(x,y)] < [\forall y \exists x\, r(x,y)]$.
   c. Sea θ una congruencia del reticulado acotado $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$. Si $(0,1) \in \theta$, entonces $\theta = L \times L$.

3. Para la siguiente formula de tipo $\tau = (\{1\}, \{f^2\}, \{r^2, h^3\}, a)$ encuentre una equivalente en forma normal prenexa
   $(\exists z(f(z,u) \equiv 1) \rightarrow (\forall x\, h(x,u,y) \wedge \exists y\, r(x,x)))$

4. Sea $\tau = (\emptyset, \{\mathsf{s}^2, \mathsf{i}^2, f^1\}, \{\leq^2\}, a)$ y sea Σ igual al resultado de agregarle a Σ_{ret} los siguientes axiomas:
   $\forall x, y\; x \leq y \rightarrow f(x) \leq f(y)$
   $\forall x, y\; f(x) \leq f(y) \rightarrow x \leq y$
   $\forall x \exists y\; x = f(y)$
   De una prueba de $(\Sigma, \tau) \vdash \forall x, y\; f(x \mathsf{i} y) = f(x) \mathsf{i} f(y)$