FINAL DE LOGICA 2006

1. V o F, justifique. Hacer 4 de 5.

   F (a) Sea $\tau = (\emptyset, \{f^1\}, \emptyset, a)$. Toda τ-álgebra infinita tiene más de una subálgebr

   V (b) Sea $\tau = (\emptyset, \{s^2\}, \emptyset, a)$. Si θ es una congruencia de $\mathbf{A} = (\mathcal{P}(\{x, y\}), \cup)$, entonc es congruencia de $\mathbf{B} = (\mathcal{P}(\{x, y\}), \cap)$.

   V (c) Sea θ una congruencia de $(\mathbb{Z}, +, \cdot, 1, 0)$ (pensado como modelo de $\tau = (\{1, 0\},$ Si $(x, y), (1, z) \in \theta$, entonces $((2 + x \cdot z) - y, (z + z + y - x)) \in \theta$

   (d) Sea $\tau = (\emptyset, \{f^1\}, \emptyset, a)$. En el algebra de Lindenbaum $\mathcal{A}_{(\{f(0)=0\}, \tau)}$ se tiene $[\forall x\ f(x) = 0] < [\forall x\ f(f(x)) = 0]$

   (e) Sea $\tau = (\emptyset, \{f^1\}, \emptyset, a)$ y sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ τ-algebras. Si $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \models f(f(x)) \approx x$, ento $\mathbf{A} \models f(f(x)) \approx x$

2. Sea $\tau = (\emptyset, \emptyset, \{r^2\}, a)$ y Σ formado por las siguientes sentencias

   $\forall x \exists y\ r(x, y)$

   $\forall x, y, z\ \ ((r(x, y) \wedge r(y, z)) \rightarrow z = x))$

   Dar pruebas formales que atestigüen que:

   (a) $(\Sigma, \tau) \vdash \forall x, y\ \ (r(x, y) \rightarrow r(y, x))$

   (b) $(\Sigma, \tau) \vdash \forall y \exists x\ r(x, y)$

   (c) $(\Sigma, \tau) \vdash \forall x, y, z\ \ ((r(x, z) \wedge r(y, z)) \rightarrow x = y))$

   (Hint: Para (b) y (c) usar (a))

3. Sea $(L, \leq)$ un poset tal que para cada $a, b \in L$ existe $inf\{a, b\}$. Sea $\tau = (\emptyset, \{\mathsf{i}^2\},$ sea $\mathbf{A}_{(L,\leq)}$ la τ-álgebra cuyo universo es L e $\mathsf{i}^{\mathbf{A}_{(L,\leq)}}(a; b) = inf\{a, b\}$, para todo a, b

   (a) De una sentencia φ de tipo τ tal que

   $\mathbf{A}_{(L,\leq)} \models \varphi$ sii $(L, \leq)$ es un reticulado

   (b) Sea $\mathbf{B}$ dado por

   Universo de $\mathbf{B} = \{0, 1\}$

   $\mathsf{i}^{\mathbf{B}}(a, b) = a.b$

   Dado $m_0 \in L$, definimos $F : L \rightarrow \{0, 1\}$ por $F(x) = 1$ si $m_0 \leq x$ y $F(x)$ $m_0 \not\leq x$. Pruebe que F es un homomorfismo de $\mathbf{A}_{(L,\leq)}$ en $\mathbf{B}$.