Final de Lógica - Julio 2006

1. Verdadero o Falso (justifique).

   (a) Sea $P \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$, y supongamos $(P, \subseteq)$ es un reticulado. Entonces la operación ínfimo del reticulado $(P, \subseteq)$ es la operación intersección de conjuntos.

   (b) Sean $\mathbf{L}$ y $\mathbf{L}'$ reticulados con todos sus elementos definibles. Entonces todos los elementos de $\mathbf{L} \times \mathbf{L}'$ son definibles.

   (c) Sea Σ un conjunto de identidades de tipo τ. Entonces $\Sigma \models p \approx q$ implica hay $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$, finito, tal que $\Sigma_0 \models p \approx q$.

2. Sea $f : \langle P, \leq \rangle \to \langle P', \leq' \rangle$ un isomorfismo de posets. Pruebe que si $A \subseteq P$ tiene ínfimo a entonces $f(A) \subseteq P'$ tiene ínfimo $f(a)$.

3. Encuentre una fórmula en forma prenexa equivalente a la siguiente fórmula

$$((\forall x_1 r(x_1, x_3, x_4) \to \exists x_3 s(x_1, x_3)) \wedge \forall x_1 \exists x_4 r(x_1, x_4, x_3)).$$

4. (a) Sea $\tau = (\{c\}, \{f, +\}, \emptyset, a)$, con $a(f) = 1$ y $a(+) = 2$. Sea Σ el conjunto formado por los siguientes axiomas:

   $\exists y \exists z\ (c = +(y, z) \wedge c = +(f(y), f(z)))$

   $c = +(f(c), f(c))$

   $+$ es asociativa

   $+$ es conmutativa

   $\forall x \forall y\ f(+(x, y)) = +(f(x), f(y))$

   De una prueba formal que atestigüe $(\Sigma, \tau) \vdash +(c, c) = c$.

   (b) Sea $\tau = (\emptyset, \emptyset, \{r, s\}, a)$, con $a(r) = 2$ y $a(s) = 2$. De una prueba formal que atestigüe $(\{\forall x \exists y\ r(x, y) \vee s(y, x)\}, \tau) \vdash \forall x\ (\forall y\ \neg r(x, y) \to \exists z\ s(z, x))$.