Final de Lógica 2007

1. Sea $\tau = (\{c\}, \emptyset, \{r^2\}, a)$, y sea Σ el conjunto formado por los siguientes axiomas:
   $\forall x, y\ (r(x,y) \rightarrow r(y,x))$
   $\forall x, y, z\ ((r(x,y) \wedge r(y,z)) \rightarrow r(x,z))$
   $\forall x, y\ (x \neq y \rightarrow \forall z (r(x,z) \vee r(y,z))$
   $\forall x, y \exists z\ (z \neq x \wedge z \neq y)$
   Dar una prueba formal de $\forall x\ (x \neq c \rightarrow r(x,c))$ en la teoría (Σ, τ).

2. Sea $\tau = (\emptyset, \emptyset, \{r^2\}, a)$ y sea $\mathbf{A}$ dado por:
   $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$
   $r^{\mathbf{A}} = \{(0,1), (0,1), (1,2), (2,1), (2,3), (3,2), (3,4), (4,3), (4,1), (1,4)\}$.
   Decida cuales elementos de $\mathbf{A}$ son definibles. Justifique.
   (Ayuda: notar que $\mathbf{A}$ es un grafo, haga un dibujo.)

3. V o F, justifique
   a. Hay un conjunto Σ de sentencias del tipo $\tau = (\emptyset, \{s^2, i^2\}, \emptyset, a)$ tal que para cada modelo $\mathbf{A}$ de tipo τ se tiene que $\mathbf{A} \models \Sigma$ sii $\mathbf{A}$ es un reticulado finito.
   b. Sean $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ τ-álgebras y sea $\varphi \in F^\tau$, $\varphi = \varphi(v)$. Si $\mathbf{A} \models \varphi[a]$ y $\mathbf{B} \models \varphi[b]$ entonces $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \models \varphi[(a,b)]$.
   c. Hay un modelo finito $\mathbf{A}$ del tipo $\tau = (\emptyset, \{f^2\}, \emptyset, a)$ tal que todos los elementos de $\mathbf{A}$ excepto uno son definibles.

4. Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$, τ-álgebras. Sea $\varphi = \varphi(v_1, ..., v_n)$ una formula en la cual no ocurren los simbolos $\rightarrow, \leftrightarrow, \neg$. Pruebe que si $F : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ es un homomorfismo sobre, entonces $\mathbf{A} \models \varphi[a_1, ..., a_n]$ implica $\mathbf{B} \models \varphi[F(a_1), ..., F(a_n)]$, cualesquiera sean $a_1, ..., a_n \in A$.